О. А. Белослудцев, В. Б. Соловьянов, Л. Е. Шмакова

Методика обучения решению задач по теории вероятностей

Методические рекомендации

ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
Свердловской области

Министерство образования и молодежной политики Свердловской области
Государственное автономное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования Свердловской области
«Институт развития образования»
Кафедра математики и информатики

О. А. Белослудцев, В. Б. Соловьянов, Л. Е. Шмакова

Методика обучения решению задач по теории вероятностей

Методические рекомендации

Екатеринбург
2022

ББК 74.262.21
Б 43

Рецензенты:
Е. В. Бородич, учитель математики МАОУ Гимназия № 18, г. Н. Тагил;
Ю. А. Куликов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры управленческих и педагогических технологий Нижнетагильского филиала ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования»

Авторы:
О. А. Белослудцев, старший преподаватель кафедры математики и информатики ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования»;
В. Б. Соловьянов, старший преподаватель кафедры математики и информатики ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования»;
Л. Е. Шмакова, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и информатики ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования»

Б 43 **Белослудцев, О. А. Методика обучения решению задач по теории вероятностей**: методические рекомендации / О. А. Белослудцев, В. Б. Соловьянов, Л. Е. Шмакова; Министерство образования и молодежной политики Свердловской области, Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования Свердловской области «Институт развития образования». – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования», 2022. – 30 с.

Настоящие рекомендации посвящены проблемам подготовки школьников к решению задач по теории вероятностей. Они предназначены для учителей математики общеобразовательных организаций, в которых преподаются методы решения заданий, с введением обновленного ФГОС основного общего образования выделенные в отдельный учебный курс «Вероятность и статистика». Предложенный авторами материал может быть востребован при подготовке к ГИА в формате ЕГЭ по математике.

Утверждено Научно-методическим советом ГАОУ ДПО СО «ИРО» от 12.12.2022 № 13

ББК 74.262.21

Оглавление

Введение

Теория вероятностей является одним из наиболее важных и востребованных разделов современной математики. Она давно вышла за рамки теории азартных игр и ныне применяется в самых разных областях деятельности человека: теоретической физике, актуарном деле, статистическом анализе, прогнозировании, медицине и др. Не случайно основы этой теории введены и в курс школьной программы. В 2010 году задача по теории вероятностей была включена в контрольные и измерительные материалы государственной итоговой аттестации (ГИА) по математике для 9-х классов, в 2012 году – в Единый государственный экзамен (математика) по математике для 11-х классов.

С введением теории вероятности в школьный курс математики возникло много вопросов среди учителей математики. К ним относятся вопросы, связанные с понятийным аппаратом, необходимым для успешного понимания и усвоения основ теории вероятностей, методологии его внедрения. Большая часть вопросов связана с методикой обучения школьников тому, как решать вероятностные задачи.

Предлагаемые до недавнего времени задания на ОГЭ и ЕГЭ по этой тематике стандартны, присутствуют в открытом банке заданий, для их решения достаточно поверхностных представлений о сути дела. Однако в структуре контрольно-измерительных материалов, предлагаемых на профильном ЕГЭ, появилось новое задание повышенного уровня сложности [9]. Для решения этого задания недостаточно знать классическое определение вероятности. По результатам профильного ЕГЭ по математике в 2022 году решаемость задания базового уровня составляет 89 %, а решаемость нового задания повышенного уровня сложности – всего 47 %.

Для решения нового задания необходимо знать теорию вероятностей на более высоком уровне, уметь вычислять вероятности сложных событий и понимать, что такое зависимые и независимые, совместные и несовместные события.

В настоящее время нет единого учебника по теории вероятностей. В разных линейках учебников появляются учебные пособия [3, 7, 8], которые еще необходимо адаптировать для применения их на уроках математики. Не случайно многие школьные преподаватели математики в качестве дополнительной литературы используют классический учебник В. Е. Гмурмана «Теория вероятностей и математическая статистика». Однако этот учебник предназначается не для школьников, а для студентов; как следствие, многие важные моменты в нем опущены (например, отсутствует всё, связанное с алгеброй событий). А с другой стороны, в него заложено много материала, который в школьную программу не входит, да и вообще не может быть освоен на уровне ученика 8-х – 11-х классов средней школы. Многие авторы школьных учебников, по-видимому, также ориентировались в основном на курс высшей математики, что сделало соответствующие разделы их учебников не слишком удачными [5, 6].

В данный момент разделы теории вероятностей разбросаны по параллелям от 8-го до 11-го класса в учебном курсе «Алгебра». Трудность заключается еще в том, что, когда нынешние учителя были школьниками, такого предмета в школе не было, поэтому мы не можем вести этот предмет так, как его нам преподавали. В идеале школьника надо знакомить с основами теории вероятностей раньше, в 5-х – 7-х классах: именно в этом возрасте хорошо понимаются и усваиваются простейшие вещи, связанные с комбинаторикой (читай «с подсчетом числа случаев»). В классах с углубленным изучением математики обычно так и делается (как правило, на дополнительных, факультативных занятиях). Естественно, что в 8-х – 9-х классах обучающимся теорию вероятностей следует давать не так, как тем, кто с ней столкнулся впервые.

В 2018 году в Институте развития образования Свердловской области были изданы методические рекомендации «Проблемные вопросы преподавания математики. Теория вероятности» [1]. В методических рекомендациях представлены исторические факты развития теории вероятностей и достаточно полно изложены вопросы из алгебры событий, приведено классическое аксиоматическое определение вероятности, приводятся примеры на вычисление вероятности случайного события с использованием геометрического подхода. Кроме того, для вычисления вероятностей простых случайных событий описывается применение формул комбинаторики, а для сложных событий – теоремы теории вероятностей для зависимых и независимых, а также для совместных и несовместных событий. Таким образом, теоретический материал изложен достаточно подробно, но практических примеров с анализом решения и обоснованием той или иной схемы решений недостаточно.

В связи с принятием в мае 2021 года обновленных федеральных государственных образовательных стандартов основного общего образования (далее – ФГОС ООО) в содержании математического образования в 5-х – 9-х классах произошли изменения, направленные на реализацию Концепции развития математического образования в Российской Федерации (утверждена в 2013 году) и выполнение поручения Президента РФ «обеспечить совершенствование преподавания учебных предметов “математика” и “информатика” в общеобразовательных организациях, установив их приоритет в учебном плане и скорректировав содержание примерных основных образовательных программ общего образования» (декабрь 2020 года) [4].

Важным моментом является более четкое представление структуры учебного предмета «Математика», которую образовали четыре учебных курса: «Математика» для учащихся 5-х – 6-х классов, «Алгебра», «Геометрия», «Вероятность и статистика» для учащихся 7-х – 9-х классов. В структуре предмета выделен новый курс – «Вероятность и статистика», основное содержание которого ранее было представлено в курсе алгебры. Основными линиями содержания этого курса стали: вероятность, статистика, комбинаторика, графы, логика, множества [4]. Новый курс имеет прикладной характер, включающий практические работы и эксперименты.

Учитывая всё вышесказанное, настоящие рекомендации имеют практико-ориентированную направленность. Они состоят из двух разделов, в каждом из которых приводится достаточно примеров на построение различных математических моделей решений заданий на вычисление вероятностей случайных событий.

Первый раздел посвящен методике применения формул комбинаторики (перестановок, размещений и сочетаний) к нахождению вероятностей, второй – методике применения теорем теории вероятностей (сложения и умножения) для отыскания вероятности сложных событий. Надеемся, что методические рекомендации окажут педагогам реальную помощь в деле обучения школьников решению задач по теории вероятностей.

Глава 1. Методика применения формул комбинаторики при решении задач теории вероятностей

Чтобы найти оптимальный способ решения задачи, нужно понимать основные идеи и методы теории вероятностей, а также знать основные определения и формулы, уметь пользоваться ими. В данной главе достаточно подробно остановимся на формулах и приемах из раздела комбинаторики, используемых при решении сложных заданий, связанных с вычислением вероятностей случайных событий.

1.1. Основные законы и формулы комбинаторики

Под *комбинаторикой* понимают область математики, в которой изучаются практические задачи на выбор из некоторой совокупности объектов элементов, обладающих тем или иным свойством. В комбинаторике наиболее часто используют два правила (закона): *правило сложения* и *правило умножения*.

Правило сложения – если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор «a или b» можно сделать $m + n$ способами. Данное правило справедливо, если имеются элементы трех, четырех или более типов, и применяется, когда при решении приходится часто разбивать всё множество перечисляемых комбинаций на попарно непересекающиеся группы комбинаций.

Правило умножения – если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор «a и b» можно сделать $m \cdot n$ способами. Так же как и предыдущее правило, оно справедливо для любого количества типов объектов, причем наиболее часто используется в решении задач на вычисление вероятностей произвольных событий.

Рассмотрим в качестве примера задачу: «Из трех экземпляров учебника алгебры, семи экземпляров учебника геометрии и двух экземпляров учебника физики надо выбрать комплект, содержащий все три учебника по одному разу. Сколькими способами это можно сделать?»

Будем рассуждать следующим образом: первый учебник можно взять любым из трех по алгебре (три способа), затем при данном выборе берется один учебник по геометрии из семи представленных. Наконец, последнюю книгу (учебник по физике) выбираем произвольную из двух возможных. Всего вариантов получится: $3 \cdot 7 \cdot 2 = 42$ комплекта. Надо отметить, что в этой задаче выбор учебников по разным предметам независим, что впоследствии является важным элементом на некоторых этапах рассуждений для заданий из теории вероятностей.

Существуют три основные формулы, которые чаще всего встречаются при решении как комбинаторных задач, так и задач, решаемых в теории вероятностей: перестановки, сочетания и размещения.

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются *перестановки* – любое расположение из n элементов в определенном порядке. Например, если имеются три элемента a, b, c, то их между собой можно упорядочить шестью способами: $abc, bac, acb, bca, cab, cba$. Легко можно получить формулу для нахождения общего количества перестановок из n элементов, данное число обозначается P_n и вычисляется по формуле: $P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = n!$ (читается n факториал). При решении задач на данную формулу необходимо только учитывать количество объектов и чтобы эти объекты отличались друг от друга хотя бы одним свойством – номером по порядку и т. п.

Сочетания в задачах комбинаторики встречаются, когда рассматривается количество подмножеств, состоящих из $к$ элементов n-элементного множества. В литературе принято обозначать число *сочетаний* C_n^k (читается C из n по $к$), которое можно вычислить по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\,.$$

Стоит отметить, что для нахождения числа сочетаний не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Например, если требуется взять два произвольных элемента трехэлементного множества, то число способов этого выбора равно 3, т. е. $C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = \frac{6}{2\cdot 1} = 3$.

Реже всего в задачах комбинаторики встречается использование формулы числа размещения, когда выбираются $к$ элементов из n-элементного множества, причем порядок данных элементов важен. Обозначается такое число A_n^k, формула для вычисления которого будет:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

1.2. Применение формул комбинаторики в задачах на вычисления вероятностей

При решении задач на вычисление вероятностей случайных событий очень важно отметить, что любая задача является текстовой и поэтому практически носит некий обособленный характер. Следовательно, представленные рекомендации не являются в общем случае универсальными и иногда, возможно, применяются только в частном случае. Однако можно рекомендовать несколько действенных приемов, которые помогут обучающимся понять структуру заданий по нахождению вероятностей сложных событий. Остановимся на важных моментах при подготовке к решению таких задач.

1. Вероятность – это некоторая, строго говоря, функция, принимающая значение от 0 до 1 и характеризующая данное случайное событие.
2. В задачах с использованием формул комбинаторики можно вычислить вероятности с использованием формулы $P(A) = \frac{N(A)}{N}$, где $N(A)$ – число элементарных событий, благоприятствующих событию A, N – число всевозможных равновозможных элементарных событий.
3. Для составления математической модели задач теории вероятностей лучше придерживаться некоторой *схемы*, состоящей из следующих пунктов:
   а) внимательно прочитать задачу и понять, что именно происходит (например, что и из какого ящика выбирается и т. п.);
   б) найти основной вопрос задачи вроде «вычислить вероятность того, что…» и это многоточие записать в виде события, вероятность которого надо найти;
   в) когда событие записано, требуется понять, к какой «схеме» теории вероятностей относится задача для выбора правильной формулы, особенно с использованием комбинаторики;
   г) если формулы выбраны правильно, подставить в формулу для вычисления $P(A)$, провести необходимые вычисления и записать ответ задачи.

Остановимся несколько подробнее на предложенной схеме.

На первом этапе (а) обучающийся должен проанализировать, осмыслить условие задачи для подготовки к следующему этапу.

На втором этапе (б) понять вопрос задачи, ввести название случайного события, которое необходимо для начала построения математической модели этого задания.

На следующем этапе (в) понять схему (идею) решения задачи теории вероятностей, как бы «прочувствовать» формулу, ответив на вспомогательный вопрос – почему предложенный вариант выбора той или иной формулы (комбинаторики) можно использовать для решения задачи.

И в завершение, используя правильные формулы, подставить их для вычисления вероятности события $P(A)$ и по возможности упростить ответ, доведя его до простого, лучше еще представить в десятичном виде, ограничившись тремя-четырьмя знаками после запятой при округлении.

Рассмотрим данную схему на примере нескольких задач, которые способствуют лучшему усвоению материала обучающимися на уроках учебного курса «Вероятность и статистика».

Пример 1. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «книга».

Решение. В задаче идет речь об упорядочении букв разрезной азбуки для составления слова. Для начала вводим основное событие A = (все пять букв стоят по порядку, а именно «К Н И Г А», т. е. на первом месте «К», на втором – «Н» и т. д.). Так как в задании происходит только одно испытание, связанное с упорядочением букв, то число исходов (элементарных событий), благоприятствующих событию A, равно $N(A) = 1$, число всех возможных исходов равно числу способов переставить пять букв на разные позиции, начиная с первой и заканчивая пятой, по известной формуле из комбинаторики (о числе перестановок) оно равно $N = 5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$. Тогда по классической формуле для вероятности события A получим:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \approx 0{,}0083.$$

Ответ. 0,0083.

Замечание. В данном примере принципиально важно, что все буквы разные, например, в аналогичной ситуации для слова «ротор» вероятность события при случайной расстановке букв по порядку будет равна $\frac{1}{30}$, так как перестановки букв «Р» и «О» друг с другом не меняют само слово.

Пример 2. Группа, состоящая из восьми человек, случайным образом рассаживается на восьми стульях с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

Решение. Придерживаясь плана, по условию задачи определяем за событие

A = {Два определенных лица окажутся рядом за прямоугольным столом при случайном рассаживании}. Сначала можно найти общее число равновозможных элементарных событий, которое равно числу перестановок из восьми лиц, а именно $N = 8! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot8 = 40320$. Далее вычислим число благоприятных исходов. Удобно будет рассуждать, если рассматривать выбранную пару лиц, сидящих рядом, как один объект. Тогда число вариантов расположения этой пары равно семи (первое – второе места, второе – третье места… седьмое – восьмое места). Число вариантов размещения выбранных лиц внутри самой пары равно двум (*аб* и *ба*, где *а* и *б* – выбранные люди). Таким образом, получится $7\cdot2 = 14$ вариантов для двух выбранных лиц оказаться рядом. При каждой такой рассадке указанных лиц остальные шесть мест можно заполнить произвольно, т. е., другими словами, переставить места шестью (!) способами. Тогда $N(A) = 7\cdot2\cdot6! = 2\cdot7!$ Следовательно, вероятность события A равна:

$P(A) = \frac{2\cdot7!}{8!} = \frac{2}{8} = 0{,}25.$

Ответ. 0,25.

Замечание. При вычислении числа благоприятных исходов в примере было использовано правило умножения из комбинаторики.

Пример 3. Из урны, содержащей пять белых и три черных шара, вынимаются одновременно два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. За событие A можно взять «оба вынутых шара белые». В этой модели вытаскивания шаров нас интересует число способов взять два шара из общего количества восьми (число всевозможных исходов) и затем отобрать из них те, что благоприятствуют событию «два шара оказались белыми». Общее число случаев N по формуле числа сочетаний, т. к. необходимо найти подмножества, состоящие из двух предметов, от общего количества, поэтому вычисляется по формуле $N = C_8^2 = \frac{8!}{2!\cdot(8-2)!} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$. Число случаев, благоприятствующих событию A, – это число способов выбрать два белых шара из пяти равно $N(A) = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$. Отсюда можно получить вероятность события A

$P(A) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$.

Ответ. 0,357.

Пример 4. Среди кандидатов в школьный совет три семиклассника, пять восьмиклассников и шесть девятиклассников. Из этого состава надо выбрать четверых. Найти вероятность, что будут выбраны учащиеся одного класса.

Решение. Исходя из вопроса задачи, обозначим событие A = (выбраны учащиеся одного класса). Данная задача практически совпадает с предыдущим примером с одной лишь особенностью, что вместо шаров рассматриваются ученики, вместо цвета шаров учащиеся относятся к разным классам. Поэтому модели задачи одинаковые: сначала вычисляем общее число всех равновозможных исходов, используя формулу числа сочетаний для выбора четырех предметов из общего количества в 14 = 3+5+6 учащихся, потом рассматриваем варианты выбора учащихся только одного класса. Тогда число всевозможных исходов будет:

$$N = C_{14}^4 = \frac{14!}{4!\cdot(14-4)!} = \frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 11\cdot 13\cdot 7 = 1001.$$

Для исходов, благоприятствующих событию, возможны два варианта: «выбраны все четверо восьмиклассников» или «выбраны все четверо девятиклассников». В первом случае имеем $N_1(A) = C_5^4 = \frac{5!}{4!\cdot(5-4)!} = 5$,

а во втором получится $N_2(A) = C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot(6-4)!} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$. Таким образом, $N(A) = N_1(A) + N_2(A) = 5 + 15 = 20$. Окончательно для вероятности случайного события – все ученики из одного класса – получим:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{20}{1001} \approx 0{,}02.$$

Ответ. 0,02.

Замечание. При вычислении числа благоприятных исходов в примере было использовано правило сложения из комбинаторики.

Пример 5. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. Для выполнения спецзадания наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины и четыре мужчины.

Решение. Заметим, что если событие A = (среди отобранных ровно три женщины), то оно будет равносильно событию B = (среди отобранных четыре мужчины), поэтому в данной ситуации можно рассмотреть одно из этих событий, пусть это будет A. Как это уже было в предыдущей задаче, сначала вычисляем число возможных элементарных исходов испытания, равное числу способов, которыми можно выбрать семь человек из всех работников цеха, т. е. из десяти человек,

$$N = C_{10}^{7} = \frac{10!}{7! \cdot (10-7)!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120.$$

Для подсчета числа исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди семи отобранных ровно три женщины), заметим, что трех женщин можно выбрать из четырех C_4^3 способами, при этом остальные четыре человека должны быть мужчинами. Выбрать четырех мужчин из шести аналогично можно C_6^4 способами. Следовательно, по комбинаторному правилу умножения, по условию происходит одновременный выбор элементов некоторого множества, имеем:

$$N(A) = C_4^3 \cdot C_6^4 = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 60.$$

Окончательно для вероятности события A получим

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{60}{120} = 0{,}5.$$

Ответ. 0,5.

Пример 6. Из урны, в которой находятся три белых и два черных шара, переложены два шара в другую урну, содержащую пять белых и пять черных шаров. Найти вероятность того, что во второй урне оказалось белых и черных шаров поровну.

Решение. На первый взгляд кажется, что для решения необходимо учитывать изначальное количество шаров второй урны (десять штук), хотя сразу можно отметить, что белых и черных шаров было одинаковое число по пять штук, поэтому для ответа на вопрос задачи нас интересует выбор двух шаров из первой урны разного цвета. Введем событие A = (выбранные два шара разного цвета). Элементарным исходом является любой выбор двух шаров из пяти, т. е. $N = C_5^2 = 10$. Число $N(A)$ исходов, благоприятствующих событию A, когда из двух шаров один белый, а другой черный; воспользовавшись правилом умножения, получаем $N(A) = C_3^1 \cdot C_2^1 = 3 \cdot 2 = 6$. Тогда по классической формуле для нахождения вероятности события имеем:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Ответ. 0,6.

Пример 7. Пять пассажиров поднимаются на лифте девятиэтажного дома. Считая, что любой пассажир, независимо от других, может выйти на любом этаже, начиная со второго и заканчивая девятым, найти вероятность того, что на четвертом этаже выйдут ровно два пассажира.

Решение. Искомое событие определяется выходом пары пассажиров на четвертом этаже и остальных трех – на других семи этажах. Так как каждый пассажир может выйти на любом из восьми этажей, то для пяти пассажиров общее число N всевозможных вариантов выхода равно:

$$N = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^5.$$

Событию A= (выход пары пассажиров на четвертом этаже) благоприятствует, что выбор двух человек из пяти возможных $C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10$, каждому из которых соответствуют всевозможные способы выхода остальных пассажиров на семи этажах (все, кроме четвертого). Таких способов будет $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$. Тогда число благоприятствующих событию A исходов по правилу умножения получится $N(A) = C_5^2 \cdot 343 = 3430$. Окончательно имеем $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3430}{8^5} \approx 0{,}1047$.

Ответ. 0,1047.

Пример 8. Из партии, содержащей десять изделий, среди которых три бракованных, наудачу берут три изделия. Найти вероятность того, что хотя бы одно из них бракованное.

Решение. Введем событие A = (в выборке хотя бы одно бракованное изделие). Поскольку в условиях эксперимента нас не интересует порядок расположения элементов в выборке, то полное число исходов этого опыта определяется числом всевозможных сочетаний выбора трех изделий из десяти, другими словами, $N = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{8\cdot9\cdot10}{6} = 120$. Благоприятствующие событию A исходы составляют три варианта выборки: с одним, двумя или тремя бракованными изделиями. В выборке, содержащей одно бракованное изделие, имеются, согласно условию примера, еще два стандартных. Одно бракованное изделие можно выбрать тремя способами (взять одно из трех изделий с браком). Два стандартных изделия можно выбрать $C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot5!} = 21$ способом, так как общее число стандартных изделий равно 10 - 3 = 7. Значит, выборка, содержащая одно бракованное и два стандартных изделия, может быть осуществлена $3 \cdot C_7^2 = 3 \cdot 21 = 63$ способами. Для второго варианта: два бракованных и одно стандартное изделие, – рассуждая аналогично, можно осуществить $C_3^2 \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21$ способом. И наконец, выборку, где все три изделия бракованные, можно произвести единственным образом – вынув сразу все три имеющиеся бракованных изделия. Следовательно, число благоприятных исходов искомого события равно $N(A)$ = 63 +21+ 1 = 85. Тогда вероятность события A равна $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{85}{120} = \frac{17}{24} \approx 0{,}708.$

Ответ. 0,708.

Замечание. Данный пример можно решить другим способом, найдя вероятность противоположного события $\bar{A}$ = (в выборке все три изделия стандартные), тогда $N(\bar{A})$ = $C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$, вероятность события $\bar{A}$ равна $P(\bar{A}) = \frac{N(\bar{A})}{N} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$, откуда $P(A)$= 1- $P(\bar{A})$=$1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$.

Пример 9. Десять вариантов контрольной работы, каждый из которых написан на отдельной карточке, перемешиваются и распределяются случайным образом среди восьми учащихся, сидящих в одном ряду, причем каждый получает по одному варианту. Найти вероятность того, что варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными.

Решение. Так как опыт состоит в выборе восьми элементов из десяти без возвращения, но с упорядочением их по мере выбора в последовательную цепочку, то общее число всевозможных исходов равно числу размещений из десяти по восемь, т. е.:

$$N = A_{10}^8 = \frac{10!}{(10-8)!} = \frac{10!}{2}.$$

Для события A = (варианты 1 и 2 останутся неиспользованными) благоприятный исход – размещение вариантов 3, 4, …, 10 по учащимся, т. е. размещение из восьми по восемь, поэтому число благоприятных исходов будет равно:

$$N(A) = A_8^8 = 8!$$

Значит, $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{8!\cdot 2}{10!} = \frac{2}{9\cdot 10} = \frac{1}{45} \approx 0{,}022.$

Ответ. 0,022.

Пример 10. Имеются десять карточек с первыми буквами русского алфавита. Выбираются последовательно четыре карточки и раскладываются в ряд в порядке поступления слева направо. Найти вероятность того, что слово (ряд из четырех букв) начинается с согласной буквы.

Решение. Для события A = (слово из четырех букв начинается с согласной буквы) общее число N равновозможных элементарных исходов равно числу размещений из 10 по 4 $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!}$, так как в слове важен порядок букв, из которых оно состоит. Найдем число благоприятных исходов для события A. Благоприятный исход – на первом месте в слове стоит одна из шести согласных букв из множества {а, *б*, *в*, *г*, *д*, е, ё, *ж*, *з*, и}, при этом оставшиеся три буквы можно выбрать A_9^3 способами, другими словами, по правилу умножения число благоприятных исходов равно $N(A) = 6 \cdot A_9^3$. Тогда для вероятности получим:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6 \cdot A_9^3}{A_{10}^4} = \frac{6 \cdot 9! \cdot 6!}{10! \cdot 6!} = 0{,}6.$$

Ответ. 0,6.

1.3. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Десять различных книг случайным образом расставлены на полке. Найти вероятность того, что три определенные книги окажутся рядом.

Указание к решению. Удобнее рассмотреть три книги как единое целое с учетом способов перестановок внутри и среди десяти книг на полке.

Задача 2. В классе двадцать учащихся, среди которых восемь учатся на отлично. По списку отобраны семнадцать учеников. Найти вероятность того, что среди отобранных шесть отличников.

Указание к решению. При вычислении числа благоприятных исходов необходимо учесть, что среди отобранных учеников есть как отличники, так и не отличники, и затем использовать правило умножения комбинаторики.

Задача 3. В урне четыре красных, шесть зеленых и пять синих шаров. Одновременно вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара одного (любого) цвета.

Указание к решению. Для вычисления числа элементарных исходов воспользоваться формулой числа сочетаний и учесть, что для нахождения числа благоприятных исходов получится три варианта.

Задача 4. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятность того, что на четных местах стоят четные числа.

Указание к решению. Использовать правило умножения для вычисления числа благоприятных исходов с учетом количества перестановок четных и нечетных чисел.

Задача 5. Телефонная книга раскрывается наудачу, и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из семи цифр, причем все комбинации цифр равновозможны, найти вероятность того, что четыре последние цифры телефонного номера одинаковы.

Указание к решению. Учесть, что пятая, шестая и седьмая цифры совпадают с выбором четвертой цифры.

Задача 6. В цветочном киоске имеются шесть роз и шесть хризантем. Найти вероятность того, что наудачу составленный букет из трех цветов будет состоять из цветов одного вида.

Указание к решению. При вычислении числа благоприятных исходов учитывать, что цветы могут быть либо только розы, либо только хризантемы.

Задача 7. Десять школьников, среди которых Петров и Васечкин, случайным образом занимают очередь в столовую. Какова вероятность того, что между Петровым и Васечкиным в очереди окажется менее двух человек?

Указание к решению. Рассмотреть два варианта количества учеников между Петровым и Васечкиным, с помощью теоремы сложения найти число благоприятных исходов, учитывая перестановки их между собой.

Задача 8. Наудачу раскрывается телефонная книга, и случайно выбирается шестизначный номер телефона. Считая, что все комбинации цифр равновозможные, найти вероятность того, что номер состоит из различных неповторяющихся цифр.

Указание к решению. Использовать формулу числа размещений для нахождения числа благоприятных исходов.

Ответы:

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
1	$\frac{1}{15}$	5	0,001
2	$\frac{28}{95}$	6	$\frac{2}{11}$
3	$\frac{31}{105}$	7	$\frac{34}{45}$
4	$\frac{1}{126}$	8	0,0864

Глава 2. Методика применения теорем сложения и умножения вероятностей при решении задач

При изучении возможности наступления нескольких событий в ходе одного эксперимента учителю важно уделить внимание алгебре событий, или, другими словами, их математическим моделям. Обучающие, не умеющие записывать математическую модель события, испытывают трудности при решении задач на применение теоремы произведения, теоремы суммы вероятностей совместных событий, полную вероятность.

Рассмотрим вопросы построения моделей сложных случайных событий и вычисление для них вероятностей более подробно.

2.1. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Случайные события A и B называются *совместными*, если при данном испытании могут произойти оба эти события.

Случайные события A и B называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте [3].

Рассмотрим примеры таких событий [4].

При бросании игральной кости выпадение трех очков и шести очков – события несовместные, так как они одновременно не могут произойти в одном и том же опыте.

Обозначим за событие A – появление четырех очков при бросании игральной кости, а, соответственно, событие B – появление четного числа очков. События A и B совместные, так, появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Суммой событий A и B называется событие $A + B$, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий: A или B.

Теорема о сложении вероятностей 1. Вероятность появления одного из двух *несовместных* событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Заметим, что сформулированная теорема справедлива для любого числа несовместных событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Если случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу несовместных событий*, то имеет место равенство:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)=1.$$

Такие события (гипотезы) используются при решении задач на полную вероятность.

Произведением событий A и B называется событие AB, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события: A и B одновременно (*совместные* события).

Теорема о сложении вероятностей 2. Вероятность суммы *совместных* событий вычисляется по формуле:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

События A и B называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

Событие A называется *зависимым* от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.

Например, если событие A – деталь годная, событие B – деталь окрашенная, то событие AB – деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Например, мы бросаем монету несколько раз подряд. Если A, B, C – появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то «ABC» – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Теорема об умножении вероятностей. Вероятность произведения *независимых* событий A и B вычисляется по формуле:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Вероятность произведения *зависимых* событий вычисляется по формуле условной вероятности.

Условной вероятностью $P_A(B) = P(B|A)$ (два обозначения) называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Например, в урне три белых и три черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найдем вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне останется пять шаров, из них три белых. Вычисляем искомую условную вероятность:

$$P(B|A) = \frac{3}{5}.$$

Этот же результат можно получить по формуле:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании равна:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором – белый. Общее число исходов – совместного появления двух шаров, безразлично, какого цвета, равно числу размещений:

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Из этого числа исходов событию AB благоприятствуют $3{\cdot}3=9$ исходов. Следовательно,

$$P(AB) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}.$$

Вычисляем искомую условную вероятность:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3/10}{1/2} = \frac{3}{5}.$$

Как видим, результаты совпали.

Теорема умножения вероятностей (для *зависимых* событий). Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

Формула полной вероятности. Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из *несовместных* событий, образующих *полную группу*, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \cdots + P(B_n)P_{Bn}(A).$$

Рассмотрим пример. Имеется пять урн:

- две урны состава H_1 – по два белых шара и одному черному шару;
- одна урна состава H_2 – десять черных шаров;
- две урны состава H_3 – по три белых шара и одному черному шару.

Проводится испытание, и наудачу выбирается урна, из нее наудачу выбирается шар. Чему равна вероятность того, что будет вынут белый шар – событие A.

Проведем рассуждение. Событие A еще не произошло. Шар может быть вынут из урн разных составов, следовательно, в алгебре событий событие A запишется в виде:

$$A = H_1 A + H_2 A + H_3 A.$$

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P_{H1}(A) + P(H_2)P_{H2}(A) + P(H_3)P_{B3}(A).$$

Вычислим отдельно вероятности событий:

$P(H_1) = 2/5$ (две урны состава H_1 из пяти), соответственно, для остальных урн: $P(H_2) = 1/5$; $P(H_3) = 2/5$.

Найдем условные вероятности:

$P_{H1}(A) = \frac{2}{3}$, в каждой урне состава H_1 два белых шара из трех;

$P_{H2}(A) = 0$, в урне состава H_2 нет белых шаров;

$P_{H3}(A) = \frac{3}{4}$, в каждой урне состава H_3 три белых шара из четырех.

Подставим найденные вероятности:

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{30}.$$

Рассмотрим задачи на применение теорем сложения и умножения.

2.2. Применение теорем сложения и умножения вероятностей в задачах на вычисления вероятностей

Остановимся на затруднениях, которые возникают при решении задач на применение теорем сложения и умножения вероятностей.

Как правило, затруднения обучающихся связаны с алгеброй событий, с недостаточной теоретической подготовкой. Для решения данных задач обучающимся необходимо понимать и знать понятия: «совместные», «несовместные», «зависимые», «независимые» события, знать теоремы. Поэтому при введении понятий важно использовать графические схемы, таблицы, ассоциации, «облака слов», «работу с опорой», «лови ошибку» и другие приемы, направленные на развитие памяти.

При закреплении материала необходимо, чтобы обучающиеся рассуждали, называли, какой эксперимент проводится, какие события наступают в ходе эксперимента, выявляли событие, вероятность которого оценивается. Необходимо обращать внимание учеников на то, как проходит эксперимент, на события, которые уже произошли, а значит, они не участвуют в оценке вероятности.

В условиях внедрения обновленных ФГОС учителю необходимо создавать условия для активизации познавательной деятельности обучающихся, и вопрос является одним из инструментов, который позволяет это реализовать. В процессе решения задачи учитель, задавая вопросы, организует обсуждение условия задачи, например:

- В чем состоит эксперимент?
- Сколько раз проводится испытание?
- Какое событие произошло?
- Могут ли данные события наступить вместе?
- Зависит ли наступление данного события от исхода предыдущего и т. д.

Обучающиеся отвечают на вопросы, рассуждают и делают выводы, оформляют краткую запись, записывают математическую модель события, в соответствии с моделью используют теорему.

Например, рассмотрим проведение эксперимента «Бросание игрального кубика» и рассуждения, которыми обучающиеся сопровождают свои действия.

В начале эксперимента обучающийся называет события, которые он будет фиксировать: событие *A* – выпадение четного числа очков, событие *B* – выпадение нечетного числа очков, событие *C* – выпадение шестерки.

Проводя эксперимент (бросая кубик), он каждый раз фиксирует результаты испытания, например:

- выпало значение 1, число нечетное – событие *B*;
- выпало значение 2, число четное – событие А;
- выпало значение 3, число нечетное – событие *B*;
- выпало значение 4, число четное – событие А;
- выпало значение 5, число нечетное – событие *B*;
- выпало значение 6, число четное – событие А, выпадение шестерки – событие *C*.

Анализируя результаты, ученики делают вывод, что события *A* и *B* не могут наступить вместе и являются *отрицанием* друг друга, следовательно, они *противоположные*. События *A* и *C* могут наступить вместе, так как 6 – четное число. Следовательно, они *совместные*. События *B* и *C* не могут наступить вместе, но одно не является отрицанием другого. Следовательно, они *несовместные*.

При введении понятий *несовместные* и *противоположные* события необходимо обратить внимание обучающихся на частицу «*не*», которая позволяет выделить пару *противоположных* событий. При введении математических моделей событий также необходимо обратить внимание обучающихся на слова и союзы, определяющие вид модели, устанавливая тем самым межпредметные связи математической логики и теории вероятностей. Для систематизации знаний можно использовать следующую таблицу 1 [2].

Таблица 1

Операции над событиями и соответствующие математические модели

№	Операция над событиями	Математическая модель	Словесное определение
1	Сумма событий	А+В	Событие, которое происходит в том случае, когда наступает **хотя бы одно** из данных событий, то есть *A* **или** *B*
2	Произведение событий	А·В	Событие, которое наступает в том случае, когда **оба** события происходят одновременно, то есть А **и** В
3	Разность событий	$А\cdot\bar{B} + \bar{A}\cdot В$	Событие, которое наступает в том случае, когда происходит **только одно** из данных событий, то есть **либо** А, **либо** В

В процессе решения задач и их обсуждения можно совместно с обучающимися составить алгоритм решения задач на применение теорем (суммы и произведения) вероятностей. Остановимся на описании основных действий при решении таких задач.

1. Внимательно прочитайте задачу и определите, в чем заключается эксперимент, сколько раз он проводится (бросается кубик, вынимается шар, стреляет орудие и т. д.).
2. Определите вид события для каждого этапа эксперимента (например, событие состоит в выпадении четного числа).
3. Определите количество событий, обозначьте их буквами (например, обозначим событие A – выход из строя первого аппарата, событие B – выход из строя второго аппарата).
4. Определите, какими являются события (совместными, несовместными, зависимыми, независимыми).
5. Выберите основной вопрос задачи вроде «вычислить вероятность того, что…» и запишите вид общего события.
6. Запишите математическую модель общего события (сумму, произведение, разность вероятностей).
7. В соответствии с моделью найдите вероятность, используя соответствующую теорему.

Пример 1. Батарея из четырех орудий сделала залп по цели независимо для каждого орудия. Вероятность попадания для каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность промаха для всей батареи [4].

Решение. Учитывая, что вероятность попадания для каждого орудия батареи равна 0,6, находим вероятность промаха для каждого орудия – 0,4. Тогда по теореме умножения для взаимно независимых событий находим вероятность промаха для всех орудий вместе:

$P = (0{,}4)^4 = 0{,}0256.$

Ответ. 0,0256.

Пример 2. У малыша в наборе имеется три треугольных и семь прямоугольных кубиков. Малыш взял один кубик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых кубиков – треугольный, а второй – прямоугольный.

Решение. Обозначим событие A – первый из взятых кубиков треугольный. Определим вероятность данного события A:

$P(A) = 3/10.$

Обозначим событие B – второй взятый кубик окажется прямоугольным. Тогда вероятность того, что событие B произойдет, вычисленная в предположении, что первый кубик – треугольный, т. е. условная вероятность, вычисляется по формуле:

$P_A(B) = P(B|A) = 7/9.$

Далее, по теореме умножения, находим искомую вероятность:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30} \approx 0{,}233.$$

Ответ. 0,233.

Пример 3. В урне пять белых, четыре черных и три синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором − черный (событие B) и при третьем − синий (событие C).

Решение. Начинаем рассуждение и решение задачи с определения вероятности появления белого шара в первом испытании − событие A:

$P(A) = 5/12.$

Вероятность появления черного шара во втором испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, т. е. условная вероятность события B, равна:

$P_A(B) = P(B|A) = 4/11.$

Перейдем к третьему испытанию и вычислим вероятность появления синего шара, в предположении, что в первом испытании появился белый шар, а во втором – черный, т. е. условную вероятность события C:

$P_{AB}(C) = 3/10.$

И в завершение находим искомую вероятность по теореме умножения для зависимых событий:

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22} \approx 0{,}045.$$

Ответ. 0,045.

Пример 4. В шкафу находятся шесть пар ботинок разных фасонов. Из них случайным образом выбираются трое ботинок. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок нет парных.

Решение. Очевидно, что решение этой задачи опирается на теорему умножения для трех зависимых событий по формуле:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C),$$

где события A = (первый наудачу взятый ботинок), B = (второй наудачу взятый ботинок, непарный первому), C = (третий наудачу взятый ботинок, непарный двум предыдущим).

Есть одна особенность в этой задаче, а именно: выбор первого случайного ботинка ничем не ограничен, т. е. вероятность случайного события A = (первый наудачу взятый ботинок) равна по определению:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{12}{12}.$$

Для вычисления условной вероятности события B имеем, что число благоприятных исходов составляет $N(B)$ =10, так как из оставшихся N_1 = 11 ботинок один будет парным уже выбранному первому, откуда вероятность события B равна $P_A(B) = \frac{N(B)}{N_1} = \frac{10}{11}$.

Наконец, для нахождения условной вероятности события C = (третий наудачу взятый ботинок, непарный двум предыдущим) используем, что число элементарных исходов, благоприятных этому событию, равно $N(C)$ = 8, так как из оставшихся десяти ботинок будут два парных первым двум выбранным, поэтому вероятность $P_{AB}(C) = \frac{N(C)}{N_2} = \frac{8}{10}$.

Окончательно получим $P(A{\cdot}B{\cdot}C) = 1{\cdot}\frac{10}{11} \cdot \frac{8}{10} = \frac{8}{11} \approx 0{,}727$.

Ответ. 0,727.

Пример 5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Решение. Если A – событие, в котором наудачу взятое двузначное число кратно 2, а B – событие, которое происходит, когда число кратно 5, то надо найти вероятность суммы событий, т. е. $P(A+B)$. Так как события A и B совместимые, то применима для вычисления вероятности формула сложения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A{\cdot}B).$$

Двузначные числа − это 10, 11… 98, 99. Всего их 90. Легко догадаться, что 45 из них кратны 2 (благоприятствуют наступлению A) или четные. Очевидно также 18 чисел кратны 5 (благоприятствуют наступлению B), и, наконец, 9 кратны и 2 и 5 одновременно (благоприятствуют наступлению $A{\cdot}B$). Поэтому

$$P(A) = \frac{45}{90} = 0{,}5;\ P(B) = \frac{18}{90} = 0{,}2;\ P(A \cdot B) = \frac{9}{90} = 0{,}1$$

и, следовательно, $P(A + B) = 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}6$.

Ответ. 0,6.

Пример 6. Если шахматист *А* играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста *Б* с вероятностью 0,52. Если *А* играет черными, то *А* выигрывает у *Б* с вероятностью 0,3. Шахматисты *А* и *Б* играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что *А* выиграет оба раза.

Решение. Поскольку возможности выиграть первую и вторую партии не зависят друг от друга, то мы имеем дело с *независимыми* событиями. Вероятность произведения *независимых* событий равна произведению их вероятностей:

$$P = 0{,}52 \cdot 0{,}3 = 0{,}156.$$

Заметим, что для решения задачи не важно, какую партию – первую или вторую – шахматист играет белыми фигурами, а какую черными. Рассмотрим решение, где учитываются оба эти варианта:

Пусть *А* – событие, состоящее в том, что шахматист выигрывает обе партии.

Пусть $C1$ – событие, состоящее в том, что шахматист играет первую партию *белыми* фигурами, $P(C1) = 0,5$.

В этом случае в первой партии шахматист выиграет с вероятностью 0,52, а во второй партии – с вероятностью 0,3. Тогда вероятность того, что он выиграет обе партии, равна:

$$P(A|C1) = 0,52 \cdot 0,3 = 0,156.$$

Рассмотрим противоположный вариант: пусть $C2$ – событие, состоящее в том, что шахматист играет первую партию *черными* фигурами, $P(C2) = 0,5$.

Учитывая данные задачи: в этом случае в первой партии шахматист выиграет с вероятностью 0,3, а во второй партии – с вероятностью 0,52.

Тогда вероятность того, что он выиграет обе партии, равна:

$$P(A|C2) = 0,3 \cdot 0,52 = 0,156.$$

По формуле полной вероятности имеем:

$P(A) = P(C_1) \cdot P(A|C_1) + P(C2) \cdot P(A|C2) = 0,5 \cdot 0,156 + 0,5 \cdot 0,156 = 0,156.$

Ответ. 0,156.

Пример 7. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение. Покупатель случайным образом выбирает упаковку. Поскольку вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Соответственно, вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Так как возможности того, что первая и вторая батарейки будут исправными, не зависят друг от друга, то мы имеем дело с *независимыми* событиями.

Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий:

$$P = 0,94 \cdot 0,94 = 0,8836.$$

Ответ. 0,8836.

Пример 8. Вероятность того, что новый электрический утюг прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение. Пусть событие A – утюг прослужит больше года, но меньше двух лет, событие B – утюг прослужит больше двух лет, событие C – утюг прослужит ровно два года, тогда событие $A + B + C$ – утюг прослужит больше года.

События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C, состоящего в том, что утюг выйдет из строя ровно через два года – строго в тот же день, час и секунду, – равна нулю. Тогда:

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(A) + P(B),$

откуда, используя данные из условия, получаем $0,93 = P(A) + 0,87$.

Тем самым для искомой вероятности имеем:

$P(A) = 0{,}93 - 0{,}87 = 0{,}06.$

Ответ. *0,06.*

Пример 9. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый может быть неисправен с вероятностью 0,01 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение. Рассмотрим условия задачи: событие A – первый автомат исправен, событие B – второй автомат исправен. Имеем:

$$P(A) = P(B)=1\text{-}0{,}01=0{,}99.$$

Рассмотрим событие AB – оба автомата исправны.

Заметим, что события A и B независимы. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)= P(A)P(B)=0{,}99^2=0{,}9801.$$

Рассмотрим событие $A+B$ – хотя бы один автомат исправен. Вычислим вероятность того, что хотя бы один автомат исправен:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)\text{-}P(AB)=0{,}99+0{,}99\text{-}0{,}9801=0{,}9999.$$

Ответ. *0,9999.*

Пример 10. Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,4. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение. Пусть событие А состоит в том, что хотя бы одна лампа не перегорит. Тогда противоположное событие $\bar{A}$ состоит в том, что перегорят все лампы в течение года.

$$P(\bar{A})=0{,}4^3=0{,}064$$
$$P(A)=1\text{-}\ P(\bar{A})=0{,}936$$

Ответ. *0,936.*

2.3. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет по одному разу. Рассматриваются события:

A – выпадение герба на первой монете;

B – выпадение хотя бы одной цифры;

C – выпадение герба на второй монете.

Определить, зависимы или независимы пары событий: а) A и B; б) A и C.

Указание к решению. Вычислить безусловную $P(A)$ и условную вероятности $P_B(A)$, $P_C(A)$ событий и сравнить их значения друг с другом.

Задача 2. Сделаны три выстрела по одной и той же цели. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4; при втором – 0,5 и третьем – 0,7. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов по цели оказалось:

а) два попадания; б) хотя бы одно попадание.

Указание к решению: а) применить теорему сложения для несовместных трех событий, когда имеется один промах в серии из трех выстрелов, учитывая, что попадание или промах в каждом случае не зависит от предыдущего исхода; б) найти вероятность противоположного события – ни одного попадания – и вычесть из 1.

<u>Задача 3</u>. Была проведена одна и та же контрольная работа в трех параллельных классах. В первом из них, где 30 учеников, оказалось, 8 работ выполнены на отлично; во втором, где 28 учащихся, – 6 работ на отлично; в третьем, где 27 учащихся, – 9 работ на отлично. Найти вероятность того, что первая случайно взятая работа из всех работ, принадлежащих классу, который выбран наудачу, окажется выполненной на отлично.

Указание к решению. Использовать формулу полной вероятности, учитывая, что полная группа событий включает выбор одного из трех классов.

<u>Задача 4</u>. В двух ящиках находятся ручки с синей и красной пастой: в первом – два с синей и три с красной, во втором – два с синей и два с красной. Из первого ящика переложили ручку во второй, затем наудачу взяли ручку из второго ящика, переложили ее в первый. Чему равна вероятность того, что состав ручек во всех ящиках не изменился?

Указание к решению. Достаточно рассмотреть два варианта выбора ручки по цвету пасты из первого ящика и возвращение ручки с одинаковой по цвету пастой из пополненного второго ящика. Учитывать теоремы умножения и сложения при вычислении вероятностей событий.

<u>Задача 5</u>. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

Указание к решению. Найдите вероятность суммы двух совместных событий и определите вероятность противоположного события.

<u>Задача 6</u>. В торговом зале магазина три консультанта. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три консультанта заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Указание к решению. Рассмотрите, какими являются события, и примените теорему для вычисления искомой вероятности.

<u>Задача 7.</u> Вероятность того, что на тестировании по математике ученик *Н*. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что *Н*. верно решит

больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что *Н.* верно решит ровно 11 задач.

Указание к решению. Рассмотреть события: 1 – *ученик решит 11 задач* и 2 – *ученик решит больше 11 задач*. Найти их сумму, определить, какими являются эти события, и применить теорему для вычисления вероятности их суммы.

Задача 8. В двух цехах выпускаются плафоны для ламп. Первый цех выпускает 45 % этих плафонов, второй – 55 %. Первый цех выпускает 3 % бракованных плафонов, а второй – 1 %. Найдите вероятность того, что случайно купленный в магазине плафон окажется бракованным.

Указание к решению. Определите для каждого цеха вероятность того, что плафон сделан в данном цехе и он бракованный.

Далее используйте формулу полной вероятности.

Ответы:

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
1	а) зависимы Р(А)= 0,5 ≠ $P_B(A)$ = 1/3 б) независимы	5	0,65
2	а) 0,41 б) 0,91	6	0,064
3	$\frac{19}{70}$	7	0,07
4	0,6	8	0,019

Заключение

Учитывая требования обновленных стандартов, учителю важно отводить часть времени задачам, которые требуют от обучающихся работать в небольших группах, самостоятельно собирать данные, обобщать результаты работы групп, проводить небольшие исследования и ставить эксперименты. Всё это диктует незаменимость вероятностного и статистического материала, его тесную связь с практической деятельностью.

Важной целью изучения эмпирического материала в школе является также развитие вероятностной интуиции, формирование адекватных представлений о свойствах случайных явлений. В современной жизни очень часто необходимо оценивать шансы, выдвигать гипотезы и предложения, прогнозировать развитие ситуации, говорить о возможностях подтверждения конкретной гипотезы и т. д. Поэтому учителю необходимо знакомить обучающихся с вероятностными и статистическими подходами к анализу эмпирических данных. Рассматривать примеры прикладного характера, анализировать ситуации из реальной жизни.

В представленных методических рекомендациях рассмотрены методические вопросы применения формул комбинаторики и теорем теории вероятностей (сложения и умножения) для решения задач на нахождение вероятности сложных событий. В дальнейшем планируется разработка методических рекомендаций по разделам «Представление данных и описательная статистика», «Введение в теорию графов», «Множества» и «Логика».

Ведущее место среди факторов, которые определяют результативность решения обучающимися задач по теории вероятностей, занимает мотивация учения и интереса. Использование примеров из жизни поможет учителю побудить интерес к учебному курсу «Вероятность и статистика», раскрыть близость теории вероятности и жизни.

Список литературы

1. Альперин, М. И. Проблемные вопросы преподавания математики. Теория вероятности. Метод. рекомендации / М. И. Альперин, О. А. Белослудцев, С. Э. Нохрин. – Екатеринбург : ГАОУ ДПО СО «ИРО», 2018. – 65 с. – Текст : непосредственный.
2. Гаваза, Т. А. О преподавании теории вероятностей в средней школе. Методический аспект / Т. А. Гаваза. – Текст : непосредственный // Вестник ПсковГУ. Серия: Естественные и физико-математические науки. – 2014. – № 4. – С. 21–30.
3. Макарычев, Ю. Н. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей : учебное пособие для учащихся 7 – 9 классов общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – [5-е изд.]. – М. : Просвещение, 2007. – 80 с. – Текст : непосредственный.
4. Математика. Реализация требований ФГОС основного общего образования : методическое пособие для учителя / Л. О. Рослова, Е. Е. Алексеева, Е. В. Буцко, под ред. Л. О. Рословой. – М. : ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО», 2022. – 264 с. – Текст : непосредственный.
5. Мордкович, А. Г. и др. Алгебра 8 класс : учебник / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019 . – 384 с. – Текст : непосредственный.
6. Мордкович, А. Г. и др. Алгебра 9 класс : учебник / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. – 368 с. – Текст : непосредственный.
7. Мордкович, А. Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных : дополнительные параграфы к курсу алгебры 7 – 9 кл. общеобразов. учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – [6-е изд.]. – М. : Мнемозина, 2012. – 112 с. – Текст : непосредственный.
8. Тюрин, Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – [2-е изд., перераб.]. – М. : МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2008. – 256 с. – Текст : непосредственный.
9. Ященко, И. В. ЕГЭ 2023. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты. 10 вариантов : сборник / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, Е. А. Коновалов. – М. : Национальное образование, 2022. – 80 с. – Текст : непосредственный.