Педагогические технологии и методики

Развитие математического мышления через задачи о времени

Development of mathematical thinking through time problems

УДК 372.851
ББК 74.26

Задорожная О. В.,
Государственное бюджетное
образовательное учреждение
«Институт развития образования»
Краснодарского края,
старший преподаватель кафедры математики,
информатики и технологического образования,
Краснодар
olgavlad2311@mail.ru

Белай Е. Н.,
Государственное бюджетное
образовательное учреждение
«Институт развития образования»
Краснодарского края,
зав. кафедрой математики, информатики
и технологического образования,
Краснодар
elenabeliy_09@mail.ru

O. V. Zadoroshnaya,
State budgetary
educational institution
«Institute of Education Development»
of the Krasnodar Region,
senior lecturer of the Department of Mathematics,
Computer Science and Technological Education
Krasnodar
olgavlad2311@mail.ru

E. H. Belay,
State budgetary
educational institution
«Institute of Education Development»
of the Krasnodar Region,
head of the Department of Mathematics,
Computer Science and Technological Education,
Krasnodar
elenabeliy_09@mail.ru

Аннотация
В статье рассмотрены вопросы формирования математического мышления через решение, усложнение и составление задач, главной темой которых является время. Представленные задания предполагают нестандартные решения, альтернативные подходы к получению результата, возможности обобщения проблемы, что способствует развитию аналитического и критического мышления, логики, творчества, возможности принятия самостоятельных решений.
Ключевые слова
Математика, математическое мышление, анализ задач.

Abstract
The article deals with the formation of mathematical thinking through solving, complicating and composing tasks, the main theme of which is time. The presented tasks suggest non-standard solutions, alternative approaches to obtaining results, the possibility of generalizing the problem, which contributes to the development of analytical and critical thinking, logic, creativity, the possibility of making independent decisions.

Keywords
Mathematics, mathematical thinking, problem analysis.

Математика занимает особое место в научной, культурной и общественной жизни. Она позволяет описывать и понимать мир вокруг нас. Математические методы используются во всех сферах жизни и науки, где необходимо анализировать, моделировать и решать проблемы с помощью чисел, формул и алгоритмов. Являясь одним из основных инструментов моделирования естественно-научных, экономических, социальных процессов, математика играет важную роль и в разработке новых технологий, в том числе таких, как криптография, компьютерная графика, банковские системы.

Мир искусства тоже не обходится без математики. Многие великие художественные произведения, архитектуры, музыки и литературы созданы на основе математических представлений. Например, золотое сечение, пропорции, фракталы служат основой для создания прекрасных форм и гармонии, вызывающих у человека эстетическое наслаждение и эмоциональный отклик.

И, несомненно, изучение математики может быть полезным для личного развития, повседневной жизни и карьеры. Поэтому изучению математики придается огромное значение.

В Концепции развития математического образования в Российской Федерации определены базовые принципы, цели, задачи и основные направления его развития. «Математическое образование должно предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе» [1]. Это возможно в том числе благодаря формированию и развитию математического мышления.

Работы отечественных и зарубежных исследователей показывают, что без целенаправленного развития математического мышления невозможно достичь эффективных результатов в обучении, систематизации знаний, умений и навыков. Математическое мышление характеризуется умением абстрагироваться, отвлекаться от второстепенных деталей, выделять существенное в любом вопросе, возможностью анализировать вопрос, расчленять его на составные части, выделять частные случаи по отношению к общему и наоборот – делать выводы [5].

Математическое мышление не является чем-то врожденным или интуитивным, но оно требует определенных знаний и навыков, которые можно развить и улучшить. Это своеобразный вид мышления, который позволяет человеку находить отличия и зависимости, выделять главное, рассуждать, проводить анализ данных, находить решения и обобщать полученную информацию [3, 4].

Формирование математического мышления – долгий процесс, требующий не только анализа математических теорий и методов, но и их применения для решения различных проблем. Как и любой другой вид мышления, математическое мышление может быть сформировано и развито в результате длительного обучения и систематических занятий.

Существуют различные методы формирования математического мышления. Рассмотрим один из многих подходов к этому процессу на примере математических задач о времени.

Одной из категорий, затрагивающих интересы современного человека, является понятие времени, осознание его непрерывности и скоротечности. Умение ориентироваться во времени, распределять и проводить операции с ним – отличительная черта человека разумного.

Время – основа для философских категорий, физических теорий, биологических исследований. В математических задачах используется не только процедура его измерения, но и демонстрация применения известных способов действий в сложной ситуации, привлечение знаний из различных содержательно-методических линий предмета.

Продемонстрируем задание по теме «Движение по окружности».

Данное задание требует от обучающихся не просто применения стандартных алгоритмов, формул или правил, но и умения интерпретировать полученные результаты, выбирать и применять простые методы решения.

Задача со стрелками

Часы со стрелками показывают 7 часов ровно. Через сколько часов минутная стрелка в пятый раз поравняется с часовой?

Решение с помощью делений

Пусть часовая стрелка прошла до пятой встречи путь, равный x делениям.

Посчитаем, сколько часовых делений пройдет минутная стрелка до встречи с часовой. Сначала минутная сделает 7 делений (от «12» до «7»), потом четыре полных круга (в круге 12 делений), т. е. 48 делений, и затем пройдет x делений, на которые повернулась часовая стрелка за время движения минутной.

Итак, путь, который прошла минутная стрелка до пятой встречи, равен $(7+48+x)$ делений. Путь часовой стрелки равен x делениям.

Скорость часовой стрелки – 1 деление в час, скорость минутной стрелки – 12 делений в час.

Время часовой стрелки равно $x/1$ часов, время движения минутной стрелки равно $(7+48+x)/12$.

Получили задачу на движение, где S (делений) – путь стрелок, v (деление/час) – скорость движения стрелок. Время затрачено одинаковое, поэтому получим уравнение:

$x/1=(7+48+x)/12$

$x=5$.

Часовая стрелка пройдет до пятой встречи 5 делений, т. е. 5 часов. Значит, через 5 часов минутная стрелка в пятый раз поравняется с часовой.

Как известно, для успешного изучения математики обучающиеся должны знать не только основные определения, свойства, формулы, теоремы, но и владеть различными методами решения задач. Научить распознаванию и использованию математических методов помогает рассмотрение различных решений одной и той же задачи [2].

Обучая на уроках математики решению задач разными способами, мы даем школьникам возможность выбора, что является важным формирующим фактом в жизни. Если обучающийся на уроках математики научится рассматривать проблему с различных сторон, будет совершать осознанный выбор способа решения путем разбора ситуаций, то его готовность к принятию самостоятельных решений в социальной или научной сфере существенно повысится. Анализ вышеуказанной задачи позволяет найти еще один способ решения.

Решение с помощью углов

Часовая и минутная стрелки двигаются по кругу. Минутная стрелка за час проходит полный круг, т. е. 360° за 1 час, поэтому можем сказать, что ее скорость 360 градусов/час (в сравнении с задачами на движение можно сказать, что градусы здесь аналогичны расстоянию). Часовая стрелка за час проходит одно деление из двенадцати, т. е. 360°/12=30°, поэтому ее скорость равна 30 градусов/час.

В 7 часов расстояние между стрелками равно 210°.

Пусть первое совпадение минутной и часовой стрелок произойдет через у часов. За это время часовая стрелка пройдет 30°у. Минутная пройдет за у часов расстояние 360°у. Но, т. к. они стартовали с разных позиций, где расстояние между ними было 210°, то получим равенство:

$360°y - 30°y = 210°$.

$y = 210/330 = 7/11$.

Таким образом, первая встреча стрелок произойдет через 7/11 часа.

Пусть вторая встреча произойдет через z часов. Скорости, по аналогии с предыдущими рассуждениями, будут: для часовой стрелки $30°z$, для минутной – $360°z$. Но минутная стрелка пройдет теперь на 360° больше, чем часовая.

$360°z - 30°z = 360°$.

$z = 360/330 = 12/11$.

Третья, четвертая и пятая, заключительная встречи произойдут тоже через 12/11 часа. Всего пройдет времени:

$7/11 + 12/11 + 12/11 + 12/11 + 12/11 = 55/11 = 5$.

Итак, через 5 часов в пятый раз минутная стрелка поравняется с часовой.

Практика применения разных методов решения одной и той же математической задачи имеет несколько преимуществ. Во-первых, на возможности решать задачи с разных точек зрения и находить различные пути решения отрабатывается развитие гибкости мышления. Во-вторых, благодаря поиску и нахождению нестандартных подходов развивается творческое мышление. В-третьих, повышается уверенность обучающегося в своих математических способностях и увеличении области своих знаний.

Анализ решения данного задания позволяет расширить его границы и рассмотреть произвольный случай. Задача учителя – подвести обучающихся к мысли, что задание можно обобщить.

«Обобщение есть переход от рассмотрения данного множества предметов к рассмотрению большего множества, содержащего данное» [6]. В процессе обобщения у школьников развиваются умения анализировать, определять закономерности, выбирать универсальные пути решения задачи на основе частных случаев.

Переформулируем условие задачи, задав параметры для известных величин.

Моделирование обобщенной задачи

Часы со стрелками показывают t часов ровно. Через сколько часов минутная стрелка в n раз поравняется с часовой?

Решение. За основу возьмем способ решения с помощью углов. Как уже определили, скорость минутной стрелки 360 градусов/час, скорость часовой стрелки равна 30 градусов/час.

В t часов минутная стрелка находится в положении «12», часовая – в положении «t», т. е. между ними t делений, учитывая, что каждое деление 30°, получим, что в t часов расстояние между стрелками равно 30 t°.

Пусть первое совпадение минутной и часовой стрелок произойдет через у часов. За это время часовая стрелка пройдет 30°у. Минутная пройдет за у часов расстояние 360°y. Но, т. к. они стартовали с разных позиций, где расстояние между ними было t°, то получим равенство:

$360°y – 30°y= 0t°$.

$y=30t/330$.

Таким образом, первая встреча стрелок произойдет через $30t/330$ часа.

Пусть вторая встреча произойдет через z часов. Скорости, по аналогии с предыдущими рассуждениями, будут: для часовой стрелки 30°z, для минутной – 360°z. Но минутная стрелка пройдет теперь на 360° больше, чем часовая.

$360°z – 30°z=360°$.

$z=360/330$.

Третья, четвертая, … и n-ая, заключительная, встречи произойдут тоже через 360/330 часа. Всего пройдет времени:

$30t/330+ (n-1)\ 360/330=(30t+360(n-1))/330$.

Итак, через $(30t+360(n-1))/330$ часов в n раз минутная стрелка поравняется с часовой.

Теперь можно подбирать числа t и n, чтобы составить задачу.

Например, пусть t=8 часов, n=4 раза. Тогда через 4 часа минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой.

Подбор не всегда удобен, поскольку возможны большие вычисления и не всегда можно быстро получить результат, а также зачастую нельзя охватить все случаи. Поэтому возникает идея сформулировать новые конкретные задачи, рассмотрев все возможные случаи.

Составление задач

Самостоятельное конструирование задачи поднимает обучающегося на новый уровень математического мышления. В задаче применяется метод перебора. Это достаточно сложная проблема для школьника, включающая рассмотрение всех возможных случаев, анализ и структурирование данных, дифференциацию по группам, привлечение знаний из различных разделов математики. При этом рассматриваем несколько способов решения задания.

Мы работаем с циферблатом с отмеченными часами от 1 до 12, поэтому возможные значения для t=1, …, 11. Количество оборотов теоретически неограниченно, поэтому n=1, … Случай, когда стрелки вращаются в обратную сторону, мы не рассматриваем.

Из выражения $(30t+360(n-1))/330$ следует, что $30t+360(n-1)$ должно делиться на 330, а значит, $t+12(n-1)$ должно делиться на 11.

Первый способ решения, основанный на понятии делимости. Рассмотрим, когда, $t+12(n\text{-}1)$ делится на 11. Перепишем выражение в виде равенства: $t+12(n\text{-}1)=11k$, где $k\in Z$ – произвольное целое число. Отсюда

$12\,n=12-t+11k$, где $t = 1, ..., 11$.

Подставляем значения t.

$t=1$, тогда $12\,n=11+11k$; $12\,n=11\cdot 12+11(k\text{-}11)$; $n=11+11m$; $m\in Z$.

$t=2$, тогда $12\,n=10+11k$; $12\,n=10\cdot 12+11(k\text{-}10)$; $n=10+11l$; $l\in Z$.

…

$t=11$, тогда $12\,n=1+11k$; $12\,n=1\cdot 12+11(k\text{-}1)$; $n=1+11p$; $p\in Z$.

Получили, что если часы со стрелками показывают t=1 час, то минутная стрелка в n=11 раз поравняется с часовой, через $(30t+360(n\text{-}1))/330=t+12(n\text{-}1)/11=(1+12\cdot 10)/11=11$ часов.

Если часы со стрелками показывают $t=2$ часа, то минутная стрелка в n=10 раз поравняется с часовой, через $(30t+360(n\text{-}1))/330=t+12(n\text{-}1)/11=(2+12\cdot 9)/11=10$ часов. Ответ можно оформить в виде таблицы.

Часы со стрелками показывают t часов	Минутная стрелка в n раз поравняется с часовой	Время, через которое минутная стрелка в n раз поравняется с часовой (30t+360(n-1))/330=t+12(n-1)/11
1	11	11
2	10	10
3	9	9
4	8	8
5	7	7
6	6	6
7	5	5
8	4	4
9	3	3
10	2	2
11	1	1

Второй способ решения с помощью сравнений

Ученики старших классов, изучающие математику на углубленном уровне, занимающиеся в математических кружках или на внеурочных занятиях, знакомятся с основами теории чисел, а именно понятием сравнения.

Необходимо выяснить, когда $t+12(n\text{-}1)$ делится на 11. Перепишем:

$t+12(n\text{-}1)=0(\mathrm{mod}11)$

$12(n\text{-}1)\equiv -t(\mathrm{mod}11)$

$12(n\text{-}1)\equiv -t-t\cdot 11(\mathrm{mod}11)$

$12(n\text{-}1)\equiv -t\cdot 12(\mathrm{mod}11)$

$n\text{-}1\equiv -t(\mathrm{mod}11)$

$n\equiv -t+1(\mathrm{mod}11)$

$n\equiv -t+1+11(\mathrm{mod}11)$

$n\equiv 12-t(\mathrm{mod}11)$

Подставляя конкретные значения, получим ответ.

Здесь мы показали обобщенное решение, подходящее для наиболее успешных учащихся, умеющих свободно оперировать переменными и понимающих, что под этими переменными подразумевается. На практике можно рассмотреть решение сравнений для каждого значения t.

К достоинствам данного способа решения можно отнести то, что по мере решения основной задачи мы привлекаем информацию из других разделов математики. Это, несомненно, способствует расширению и укреплению математических знаний. Но еще раз подчеркнем, что данный способ подходит для подготовленных обучающихся.

Третий способ решения методом перебора

Как мы уже отмечали, возможные значения для t=1, ..., 11. Количество оборотов теоретически бесконечно, поэтому n=1, ..., однако мы ограничены временным диапазоном – сутки, значит, n является конечным числом. И, поскольку речь идет о конечном числе значений переменных, мы можем для выражения «t+12(n-1) делится на 11» применить метод перебора.

Этот способ можно применять для обучающихся с разным уровнем подготовки, т. к. он не требует больших знаний в области математики, однако имеет значительную дидактическую ценность, позволяя на основе частных выводов делать общие заключения. Отметим, что данный способ требует временных затрат, поэтому можно предоставить учащимся воспользоваться им самостоятельно, в качестве домашнего задания.

Поиск закономерностей

В ходе решения, опираясь на данные в таблице решения первым способом или выражения $n\equiv 12-t(\mathrm{mod}11)$ во втором способе, видим интересную зависимость между количеством оборотов и временем, через которое окончательно встречаются стрелки. Можно сделать вывод, что при постановке задания, данного в условии, время, через которое минутная стрелка в n раз поравняется с часовой, совпадает с количеством встреч стрелок.

Например, если часы со стрелками показывают 1 час, то через 11 часов минутная стрелка в 11-й раз поравняется с часовой.

Если часы со стрелками показывают 2 часа, то через 10 часов минутная стрелка в 10-й раз поравняется с часовой. И так дальше по аналогии.

В заключение можно отметить, что математическое мышление является важным фактором для успешного обучения и профессиональной деятельности в различных сферах. Многообразие методов и форм для его формирования обусловлено многогранностью математической науки. Мы остановились только на подходе, который включает:

1. Решение задач разными способами. В этом случае достигается несколько целей – полное понимание задания, расширение кругозора, поиск возможности реализации решения в различных аспектах, выбор эффективного метода, возможность видения проблемы с разных сторон, получение новых знаний и навыков.
2. Обобщение. При решении математических задач обобщение приводит к созданию новых задач. Выявляются закономерности, общие тенденции или свойства. Этот процесс включает в себя несколько таких мыслительных операций, как сравнение, анализ, синтез, абстракция, систематизация, что способствует более глубокому пониманию математических понятий и их взаимосвязи, которое является важным аспектом развития математического мышления.
3. Самостоятельное составление задач. Это важный этап в развитии математического мышления обучающегося: демонстрация мыслительных навыков и понимание математических идей, заложенных в основу задания. Применение в процессе обучения математике задач, направленных на выработку умения самостоятельного конструирования, способствует развитию творческих навыков, познавательной активности и мотивации школьников к научно-исследовательской деятельности.
4. Поиск закономерностей. Значительный шаг в развитии математического мышления, так как позволяет выявлять связи, зависимости, общие законы и правила, которые могут быть использованы для решения других задач и построения новых теорий.

Список литературы

1. Об утверждении Концепции развития математического образования в Российской Федерации : распоряжение Правительства РФ от 24.12.2013 № 2506-р.
2. Волкова, Е. М., Задорожная, О. В. Урок-проект «Задача одна – методы решения разные». – URL: https://urok.1sept.ru/articles/538069 (дата обращения 15.03.2023).
3. Задорожная, О. В., Кочетков, В. К., Надвыдова, З. Ю. Развитие математических способностей через задачи : сборник научных трудов студентов. – Элиста : КалмГУ, 2020. – С. 82–84.
4. Задорожная, О. В., Кочетков, В. К., Наранова, Б.И. Математические задачи и критическое мышление : сборник научных трудов студентов. – Элиста : КалмГУ, 2020. – С. 84–86.
5. Маркушевич, А. И. Об очередных задачах преподавания математики в школе // На путях обновления школьного курса математики. – М. : Просвещение, 1978. – С. 3–27.
6. Пойа, Дж. Математика и правдоподобные рассуждения. – М. : Наука, 1975. – 464 с.