

Министерство образования и молодежной политики Свердловской области
Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного
профессионального образования Свердловской области
«Институт развития образования»
Кафедра математики и информатики

Шмакова Л. Е., Соловьянов В. Б.

Приемы и способы решения задач с параметрами

Методические рекомендации

Екатеринбург
2022

Рецензенты:

С. И. Балеевских, учитель математики МАОУ ПГО «СОШ № 8»;

Н. А. Сеногноева, доктор педагогических наук, доцент кафедры управленческих и педагогических технологий Нижнетагильского филиала ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования».

Авторы:

Л. Е. Шмакова, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и информатики ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования»;

В. Б. Соловьянов, старший преподаватель кафедры математики и информатики ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования».

Шмакова, Л. Е.

Ш 71 Приемы и способы решения задач с параметрами: методические рекомендации / Л. Е. Шмакова, В. Б. Соловьянов; Министерство образования и молодежной политики Свердловской области, Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования Свердловской области «Институт развития образования». – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «ИРО», 2022. – 29 с.

Настоящие рекомендации посвящены проблемам подготовки школьников к решению задач, содержащих параметры. Они предназначены для учителей математики общеобразовательных организаций, преподающих методы решения рациональных и иррациональных уравнений и неравенств. Для учителей, организующих деятельность обучающихся по достижению ими предметных и метапредметных результатов в соответствии с требованиями обновленных ФГОС ООО и ФГОС СОО на основе анализа результатов государственной итоговой аттестации по математике.

В рекомендациях рассматривается аналитический метод решения задач с параметрами, анализируются основные приемы решения таких заданий, которые могут быть востребованы при решении задач, содержащих различного вида элементарные функции – показательные, логарифмические и т. п.

Утверждено Научно-методическим советом ГАОУ ДПО СО «ИРО» от 28.11.2022 № 12

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Рекомендации по решению задач с параметрами.....	6
1.1. Понятие параметра.....	6
1.2. Анализ затруднений, возникающих у обучающихся при решении задач с параметрами, и рекомендации, позволяющие эти затруднения снять.....	9
Глава 2. Аналитический метод решения задач с параметрами	15
2.1. Линейные уравнения	15
2.2. Квадратные уравнения	17
2.3. Иррациональные уравнения.....	19
2.4. Линейные неравенства	21
2.5. Квадратные неравенства	22
2.6. Иррациональные неравенства.....	24
2.7. Задания для самостоятельного решения.....	25
Заключение	27
Список литературы	29

Введение

В условиях внедрения и реализации обновленных ФГОС ООО и ФГОС СОО учителю математики на уроке необходимо организовывать деятельность, способствующую проявлению познавательной активности обучающихся. Важно, чтобы в процессе деятельности школьники могли учиться анализировать, сравнивать, сопоставлять, прогнозировать, ставить эксперименты, проводить исследования, обобщать и делать выводы.

Ценность задач с параметрами для учителя как раз и состоит в том, что для того, чтобы научить обучающихся решать такие задачи, необходимо создавать проблемные ситуации, организовывать исследовательскую деятельность. Ценность задач с параметрами для обучающихся заключается в том, что они являются своеобразным инструментом диагностики и показывают, насколько хорошо ученики усвоили основные разделы школьного курса математики, каким уровнем математического и логического мышления и навыками исследовательской деятельности обладают [2]. В современных условиях умение решать задачи с параметрами становится всё более актуальным, поскольку они помогают разрешать жизненные ситуации [1].

Специфика задач с параметрами проявляется в том, что наряду с неизвестными величинами в них фигурируют параметры, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве [1]. Одной из проблем является неумение обучающихся решать задачи с параметрами, считая их задачами повышенного уровня сложности.

В первой главе методических рекомендаций проводится анализ затруднений обучающихся, возникающих при решении задач с параметрами, и предлагаются приемы, позволяющие эти затруднения разрешить. Особенность приемов состоит в их исследовательской направленности. С учетом обновленных ФГОС ООО и ФГОС СОО в рекомендациях делается попытка рассматривать многоуровневость как инструмент организации исследовательской деятельности при решении задач с параметрами. Предлагаемые приемы способствуют формированию у учеников исследовательских навыков, позволяющих продвигаться в решении задач с параметрами, проводить исследование, рассматривать частные случаи основной задачи и делать обобщение.

Во второй главе методических рекомендаций разбираются основные приемы аналитического решения различных типов задач с параметрами (уравнений и неравенств), встречающихся в школьном курсе математики, на

углубленном уровне. Разбор каждой задачи начинается с выделения особенности, и далее поясняется решение.

Поскольку ведущими при решении задач с параметрами являются линейные, квадратные уравнения и неравенства с параметрами, то именно им и уделяется внимание: в первом и втором параграфах – работе с уравнениями, в четвертом и пятом – соответственно, работе с неравенствами. В третьем параграфе рассматриваются иррациональные уравнения, а в шестом – иррациональные неравенства. В заключение приводятся задачи для самостоятельного решения.

Многие авторы посвящали и посвящают свои научные работы проблеме изучения заданий, содержащих параметры. Методические аспекты введения теоретических вопросов, связанных с этими задачами, нуждаются в дополнительных исследованиях.

Мы считаем, что предлагаемые методические рекомендации помогут учителю выстроить траекторию движения обучающегося по приобретению навыков решения задач с параметрами и опыта исследовательской деятельности в процессе их решения.

Глава 1. Рекомендации по решению задач с параметрами

1.1. Понятие параметра

В литературе понятию «параметр» даются различные определения. Например, определение С. И. Новоселова: «Если в уравнение кроме неизвестных входят числа, обозначенные буквами, то они называются параметрами» [9].

Определение В. В. Мирошина: «Параметром называется независимая переменная величина, входящая в условие задачи или появляющаяся в процессе ее решения, «управляющая» решением задачи» [8].

То есть если в уравнении (неравенстве) некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются параметрами, а уравнение (неравенство) – параметрическим. При этом значение параметра является постоянным в пределах рассматриваемой задачи и существенно влияет на логический и технический ход решения и форму ответа.

Задачи с параметрами являются достаточно разнообразными, и при их решении обучающемуся важно понимать, что параметр имеет двойную природу: с одной стороны – это число, с другой – это неизвестная. Учитывая это, мы получаем два типа задач:

- 1) задачи, в которых надо решить неравенство или уравнение при всех возможных значениях параметров;
- 2) задачи, в которых надо найти лишь те решения, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

Решая задачи с параметрами первого типа, значение параметра (или параметров) фиксируют, считая его некоторым числом или константой [10]. Рекомендуется при проведении исследования разбить множество всех значений параметра на подмножества по некоторому целесообразному признаку и решать заданное уравнение или неравенство на каждом из этих подмножеств. Разбивку на подмножества следует проводить с учетом значений параметра, при которых или при переходе через которые происходят качественные изменения уравнения.

Второй тип задач относительно новый тип заданий, в частности, не имеет аналогов при решении стандартных задач без параметров. Задания отличаются большим многообразием и зависят от дополнительных условий, налагаемых на решение, например, количество корней уравнения или вид решения неравенства и т. п.

Перечислим основные типы задач с параметрами [6].

1. Уравнения (неравенства), которые надо решить либо для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.
2. Уравнения (неравенства), для которых необходимо определить количество решений в зависимости от значения параметра.
3. Уравнения (неравенства), для которых требуется найти все значения параметра, при которых указанные уравнения (неравенства) имеют заданное число решений (или не имеют решений, или имеют бесконечно много решений).
4. Уравнения (неравенства), для которых при искомым значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

При решении задач с параметрами используют аналитический, графический методы или метод решения относительно параметра. Ни один из способов не является универсальным. Чем же отличаются эти методы?

Аналитический метод – это метод прямого решения, повторяющий стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.

Для решения графическим методом необходимо выполнять очень качественный и точный рисунок. В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики в координатной плоскости $(x; y)$ или в плоскости $(x; a)$.

Используя метод решения относительно параметра, переменные x и a принимаются равноправными. При проведении анализа выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение становится более простым. После упрощения происходит возврат к исходному смыслу переменных x и a , и находится решение [11].

Задачи с параметрами являются сложными потому, что не существует общих методов их решения, за исключением разве что линейных уравнений, неравенств и систем уравнений с параметром, квадратных уравнений и задач, связанных с расположением корней квадратного трехчлена относительно заданных чисел.

Рассмотрим рекомендации для решения задач с параметрами, связанные со свойствами линейной и квадратичной функций [7].

1. Любое линейное уравнение с параметром a можно привести к виду:

$$f(a) \cdot x = g(a).$$

И соответственно, возможны следующие варианты:

- 1) если $f(a) \neq 0$, уравнение имеет единственное решение $x = \frac{g(a)}{f(a)}$;
 - 2) если $f(a) = 0$, а $g(a) \neq 0$, уравнение не имеет решения;
 - 3) если $f(a) = 0$ и $g(a) = 0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений [9].
2. Решение линейных неравенств с параметром a , любое из которых можно привести к одному из следующих:

$$f(a) \cdot x < g(a),$$

$$f(a) \cdot x > g(a),$$

$$f(a) \cdot x \leq g(a),$$

$$f(a) \cdot x \geq g(a),$$

основано на рассмотрении трех случаев:

- 1) если $f(a) > 0$, то при делении на $f(a)$ обеих частей неравенства его знак не меняется;
 - 2) если $f(a) = 0$, то неравенство либо не имеет решения, либо выполняется при любых значениях переменной в зависимости от знака неравенства и значений выражения $g(a)$;
 - 3) если $f(a) < 0$, то при делении на $f(a)$ обеих частей неравенства его знак меняется на противоположный.
3. При решении систем линейных уравнений удобно пользоваться тем, что любое линейное уравнение является уравнением некоторой прямой. Поэтому система двух линейных уравнений либо:
- 1) имеет единственное решение (соответствующие прямые пересекаются);
 - 2) имеет бесконечное множество решений (прямые совпадают);
 - 3) не имеет решений (прямые параллельны).

Остановимся на рекомендациях к решению задач, содержащих квадратный трехчлен с параметром [7].

1. Использовать свойства квадратичной функции.

Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданных точек можно полностью описать, если:

- 1) знать направление ветвей соответствующей параболы;
- 2) абсциссу вершины;
- 3) дискриминант;
- 4) знаки квадратного трехчлена в заданных точках.

При таком подходе приходится иметь дело лишь с системами линейных и квадратных неравенств, в то время как формальная запись условий «корень

квадратного трехчлена больше (меньше) заданного числа» приводит к системам довольно громоздких иррациональных неравенств.

2. Выполнить преобразования или замену переменной.

Используя данный подход, необходимо:

- 1) выполнить преобразования или замену переменной;
- 2) выписать ограничения на вводимую переменную;
- 3) переформулировать задачу в «терминах квадратного трехчлена».

3. Проверить на наличие ошибок:

- 1) игнорирование области значений вводимой переменной;
- 2) нахождение после замены переменной (из условия равенства нулю дискриминанта уравнения), при каких значениях параметра полученное уравнение имеет единственный корень, забывая о том, что уравнение может иметь и два корня – важно лишь то, чтобы только один из них был положительным.

По статистике, многие из выпускников не приступают к решению задач с параметрами на ЕГЭ [4, 5], считая их трудными, а если и приступают, то процент их верного решения невысок. Одной из основных причин являются трудности, определяемые спецификой самой деятельности по решению этих задач: неалгоритмичность, необходимость комплексного использования знаний и умений, переноса их в новые условия [3].

Проанализируем деятельность, которую выполняют обучающиеся, и выявим затруднения, возникающие у них при решении задач с параметрами.

1.2. Анализ затруднений, возникающих у обучающихся при решении задач с параметрами, и рекомендации, позволяющие эти затруднения снять

Рассмотрим вопросы, которые возникают при решении задач с параметрами.

1. Что значит решить задачу с параметром?
2. Что нужно знать, чтобы решать задачи с параметром?
3. Чему нужно научиться, чтобы решать задачи с параметром?

Отвечая на поставленные вопросы, проанализируем, на каком этапе решения у обучающихся возникают затруднения.

Чтобы ученику решить задачу с параметром, сначала ему надо выполнить действия, которые осуществляются при решении любого уравнения или неравенства.

1. На первом этапе привести заданное уравнение (неравенство) к более простому виду, например:
 - разложить рациональное выражение на множители;

- разложить тригонометрический многочлен на множители;
- избавиться от модулей, логарифмов и т. д. [3].

Перечислим основные предметные результаты, позволяющие обучающимся выполнять вышеобозначенные действия: умение оперировать понятиями: целые, рациональные, иррациональные, действительные (вещественные) числа, множители, тригонометрические соотношения, модуль числа, многочлен, логарифм, степень, знать свойства функций, уравнений и неравенств; умение выполнять действия с такими числами, преобразования многочленов, в том числе разложение на множители, выполнять алгебраические преобразования, например, используя свойства логарифмов, выделить степень в основании логарифма, и др.

Кроме предметных результатов обучающимся необходимо продемонстрировать и метапредметные, такие как,

- универсальные учебные познавательные действия: выявлять дефициты данных, причинно-следственные связи и закономерности, выбирать способ решения учебной задачи, оценивать, делать выводы и т. д.;
- универсальные учебные коммуникативные действия: воспринимать и формулировать суждения, выражать себя;
- универсальные учебные регулятивные действия: в ходе диалога и (или) дискуссии задавать вопросы, сопоставлять свои суждения с суждениями других участников, составлять план действий, владеть способами самоконтроля, оценивать соответствие результата цели и условиям и т. д.

Для выявления затруднений обучающихся на данном этапе обратимся к оценке предметных результатов (аналитический доклад «Типовые критерии оценки достижения результатов обучающихся в соответствии с ФГОС основного общего образования»). Для оценки предметных результатов предлагаются следующие критерии:

- знание и понимание;
- применение;
- функциональность.

Конечно же, критерий «знание и понимание» необходим, но поскольку мы говорим о решении уравнений (неравенств), рассмотрим критерий «применение»:

- использование теоретического материала при решении учебных задач/проблем, различающихся сложностью предметного содержания, сочетанием когнитивных операций и универсальных познавательных действий, степенью проработанности в учебном процессе;

- использование специфических для предмета способов действий и видов деятельности по получению нового знания, его интерпретации, применению и преобразованию при решении учебных задач/проблем; в том числе – в ходе поисковой деятельности, учебно-исследовательской и учебно-проектной деятельности.

Проанализировав описание критерия, мы выходим на сложность задач, степень их проработанности, на использование специфических для предмета способов действий в ходе поисковой, учебно-исследовательской деятельности.

2. На втором этапе обучающимся надо указать, при каких значениях параметров существуют решения и каковы они.

Проводя анализ второго этапа, мы сталкиваемся с тем, что ученикам необходимо уметь проводить исследование, и к перечисленным выше метапредметным результатам добавляются:

- учебные познавательные действия: выявлять и характеризовать существенные признаки объектов, проводить анализ на основе установленного критерия, выявлять закономерности и противоречия, использовать вопросы как исследовательский инструмент познания, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, проводить по самостоятельно составленному плану эксперимент, небольшое исследование, оценивать на применимость и достоверность информацию, полученную в ходе исследования, прогнозировать дальнейшее развитие процессов, событий и их последствия, давать адекватную оценку ситуации и предлагать план ее изменения, учитывать контекст и предвидеть трудности.

Таким образом, решение задач с параметрами представляет для обучающихся трудности не только в достижении предметных результатов (знать свойства функций, уравнений и неравенств, уметь выполнять алгебраические преобразования, владеть методами решения уравнений и неравенств), но и метапредметных (самостоятельно составлять план и проводить исследование, оценивать полученные результаты и делать выводы, прогнозировать).

Следовательно, чтобы сформировать у обучающихся способность решать задачи с параметрами, учителю следует не давать готовые подходы к решению таких задач, а организовывать исследовательскую деятельность на всех этапах работы.

1. Обучающимся нужно научиться применять равносильные преобразования уравнений, неравенств и их систем.

На данном этапе учителю можно использовать задачи с параметрами, начиная с линейных и квадратных уравнений и неравенств. Это могут быть

задачи-исследования нахождения решений в общем виде, задачи-исследования на определение корней, удовлетворяющих каким-либо свойствам, исследования количества корней в зависимости от значений параметра [2]. В процессе решения обучающимся важно:

- понять, при каких ограничениях, накладываемых на параметр, можно выполнять то или иное преобразование;
- усвоить необходимость аккуратного обращения с параметром (поскольку параметр имеет двойственную природу);
- усвоить, что запись ответа существенно отличается от записи ответов аналогичных уравнений и неравенств без параметра.

2. Обучающимся необходимо перейти к исследованию аналитических методов решения задач с параметрами (уравнений, неравенств).

На данном этапе важно удерживать внимание обучающихся, усложнять задачи постепенно, создавать проблемные ситуации, чтобы ученики исследовали подходы к решению задач, делали микрооткрытия и понимали, при каких значениях параметра уравнение имеет одно, два и более решений.

Рассмотрим ряд приемов, способствующих приобретению обучающимися опыта проведения исследований в процессе решения задач с параметрами.

1. Первый прием состоит в замене числа параметром.

Мы считаем, что учителю математики, работая в условиях реализации обновленных ФГОС, необходимо приучать обучающихся к пониманию многоуровневости задач. И он может это делать, используя данный прием, подводя учеников к задачам с параметрами и развивая у них способность к исследованию.

Пример. Решая обычное уравнение с неизвестным, например,

$$2x + 3 = 15 + x,$$

обучающиеся находят его корень, следуя алгоритму решения, и обычно на этом решение заканчивается [9]. Чтобы перейти на уровень исследования, учителю необходимо создать проблемную ситуацию. Для этого он вводит в уравнение, которое было решено, параметр и демонстрирует пример рассуждения, далее обучающиеся повторяют действия по образцу. Найдя решение, они учатся сравнивать, сопоставлять, анализировать, что изменилось при изменении данных задачи.

На следующем шаге учитель предлагает ученикам провести замену еще одного числа и высказать предположение, провести исследование и т. д. Проводя анализ, обучающиеся учатся прогнозировать, какие изменения произойдут в решении задачи при замене числовых данных параметрами. Какие множества решений следует рассмотреть.

Можно организовать работу по группам с учетом вводимых параметров и видам полученных уравнений. Чем чаще учитель будет использовать данный прием, тем больший опыт как в решении задач с параметрами, так и в проведении поисковой, исследовательской деятельности будут приобретать обучающиеся.

Используя прием, учитель понижает уровень сложности задач с параметрами и дает возможность «попробовать» обучающимся «поиграть», поэкспериментировать с уравнением. Направлений параметризации может быть достаточно много. Например, для вышеприведенного уравнения можно построить следующие шаги параметризации:

- 1) $2x + 3 = 15 + x$,
- 2) $2x + 3a = 15 + x$,
- 3) $2x + 3a = 15 + ax$,
- 4) $2x + 3a = 10 + 5a + ax$ (анализ решения полученного уравнения приводится в первом параграфе второй главы, пример 1).

Вводя параметр, учителю важно развивать у обучающихся умение рассуждать. В процессе рассуждения фиксировать внимание на постановке проблемы и выдвижении гипотезы. Вместе с учениками можно разработать чек-лист (алгоритм) проведения исследования. Например:

- 1) решить уравнение;
- 2) ввести параметр (параметры);
- 3) выполнить постановку проблемы;
- 4) провести анализ имеющейся информации по данному вопросу;
- 5) предложить условия и методы решения задач, близких к проблеме исследования;
- 6) выдвинуть гипотезы;
- 7) провести исследование;
- 8) провести анализ полученных результатов, в процессе которого доказать или опровергнуть гипотезы;
- 9) обобщить и представить результаты.

2. Второй прием состоит в использовании метода параметризации. Метод параметризации (замена числа параметром) является одним из методов, способствующих активизации познавательной деятельности обучающихся, формированию исследовательских навыков.

Использование метода параметризации дает хороший результат, когда обучающиеся, с одной стороны, уже освоили «общение» с параметром как с числом, а с другой – поняли, что необходима аккуратность в проведении

исследований. И что результаты этих исследований влияют и на решение, и на ответ. Например, чтобы решить уравнение $\sin x + \cos 24x \cos x = \sqrt{2}$, необходимо в условие задачи ввести параметр.

Обозначив $\cos 24x = a$

и записав параметризованное условие в виде $\sin x + a \cos x = \sqrt{2}$,

можно решать уравнение и исследовать, при каких значениях параметра уравнение имеет решение.

Использование метода параметризации позволяет изменить формулировку задачи и облегчить ее решение или найти более продуктивный путь ее решения.

3. Третий прием состоит в фиксировании значений параметра.

Решая задачи с параметрами первого типа, значение параметра (или параметров) фиксируют, считая его некоторым числом или константой.

Используя данный прием, учитель предлагает обучающимся провести исследование частных случаев, решить задачу в упрощенном варианте. Обучающиеся учатся переходить от общего к частному на начальном этапе и анализировать, обобщать полученные результаты. Учителю важно приучить учеников обращаться к условиям задачи, рассуждать и фиксировать связь значений параметра и качественных изменений уравнения. Порой неверный ответ обучающиеся получают, потому что не обратились к тексту задачи и не проанализировали, выполнено ли сформулированное условие. То есть у учеников должна быть сформирована читательская грамотность.

Для применения данного приема следует:

- 1) зафиксировать значение параметра;
- 2) решить уравнение или неравенство как задачу с одним неизвестным;
- 3) провести исследование, разбив множество всех значений параметра на подмножества, и перечислить решения для каждого допустимого значения параметра.

В процессе решения задач с параметрами обучающиеся учатся переформулировать задачу, проводить исследования, находить зависимости между параметрами, прогнозировать, решать несколько «частных» задач, анализировать, обобщать полученные результаты, аргументировать.

Применение учителем вышеописанных приемов на уроках позволяет активизировать познавательную деятельность обучающихся, получить опыт проведения поисковой, исследовательской деятельности и расширить круг обучающихся, готовых к решению задач с параметрами.

Учитывая полученные выводы, перейдем к рассмотрению применения аналитического метода при решении задач с параметрами.

Глава 2. Аналитический метод решения задач с параметрами

2.1. Линейные уравнения

Пример 1. Решите уравнение $a^2x - 2 = 4x - a$, a – параметр.

Решение. Выясним, при каких значениях a существует решение уравнения, и вычислим x через a в тех случаях, когда решение уравнения существует. Преобразуем уравнение $(a^2 - 4)x = 2 - a$; тогда возникают два возможных случая:

1) когда $a^2 - 4 = 0$, т. е. $a = 2$ или $a = -2$. Если $a = 2$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$ – верно при всяком значении $x \in (-\infty; +\infty)$. Если $a = -2$, уравнение станет $0 \cdot x = -4$ – оно не может быть верным ни при каком значении x ;

2) когда $a^2 - 4 \neq 0$, уравнение сводится к равносильному $(a + 2)x = -1$, которое имеет единственное решение: $x = \frac{-1}{a + 2}$.

Ответ. При $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ единственное решение $x = \frac{-1}{a + 2}$,

при $a = 2$ – бесконечное множество решений $x \in (-\infty; +\infty)$,

при $a = -2$ уравнение не имеет решений.

При записи ответов в задании с параметрами рекомендуется описывать в каждой отдельной строке полученный разный тип решения.

Пример 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решение уравнения $2x + 3a = 10 + 5a + ax$ принадлежит отрезку $[1, 2]$.

Решение. Как уже было сказано выше, в данной задаче рассматривается линейное уравнение с параметром при дополнительном условии $x \in [1; 2]$.

Эквивалентное уравнение имеет вид $(2 - a)x = 10 + 2a$.

При $a = 2$ имеем $0 \cdot x = 14$ – решений нет;

при $a \neq 2$ получаем $x = \frac{10 + 2a}{2 - a}$ – единственное решение при любых a .

По условию нам нужны те решения x , для которых выполнено неравенство

$$1 \leq \frac{10 + 2a}{2 - a} \leq 2. \text{ Решая это двойное неравенство, получаем } a \in \left[-\frac{8}{3}; -\frac{3}{2} \right].$$

Ответ. Для любого конкретного a , $a \in \left[-\frac{8}{3}; -\frac{3}{2} \right]$, исходное линейное

уравнение имеет решение $x = \frac{10 + 2a}{2 - a}$, и это решение расположено на отрезке $[1, 2]$.

Пример 3. Решите уравнение $|x + 1| + |x - 3| = a$ в зависимости от значений параметра a .

Решение удобно разбить на ряд случаев, в каждом из которых известен знак подмодульного выражения. Для этого применим схему, похожую на схему метода интервалов:

Знак выражения	$x < -1$	$-1 \leq x \leq 3$	$x > 3$
$x+1$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
Обозначение случаев	1)	2)	3)

1. При $x \in (-\infty; -1)$ уравнение примет вид $-x - 1 - x + 3 = a$, т. е. $x = -0,5a + 1 < -1$ для $a > 4$.
2. При $x \in [-1; 3]$ получится уравнение $4 = a$, т. е. для $a = 4$ решением является каждое x из отрезка $[-1, 3]$.
3. При $x \in (3; +\infty)$ имеем уравнение $x + 1 + x - 3 = a$ или $x = 0,5a + 1 > 3$ для $a > 4$.

Ответ. При $a > 4$ $x_1 = -0,5a + 1$; $x_2 = 0,5a + 1$; при $a = 4$ $x \in [-1; 3]$

Замечание. В этой и некоторых других задачах геометрическая интерпретация уравнений или неравенств помогает исследованию существования решения, установлению их количества и вычислению решений в зависимости от значения параметра a , но в данных методических рекомендациях мы не будем касаться этого метода решения.

Пример 4. Найдите все значения a , при которых любое решение системы

$$\begin{cases} x + y = 2a \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $x < y$.

Решение. Воспользуемся одним из стандартных способов решения систем уравнений – сложение уравнений, тогда исходная система равносильна

$$\begin{cases} 4x = 2a + 4 \\ x + y = 2a \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 0,5a + 1 \\ y = 1,5a - 1 \end{cases}$$

Найденные значения переменных подставим в условие задачи и получим $0,5a + 1 < 1,5a - 1$, откуда $a > 2$.

Ответ. При $a > 2$ решение системы уравнений удовлетворяет условию $x < y$.

2.2. Квадратные уравнения

При решении квадратных уравнений с параметром используют те же идеи, что и для линейных уравнений, с одним отличием, что корней может быть два и они действительные. Поэтому случаи отрицательных дискриминантов в решении не учитываются. Рассмотрим некоторые приемы решения таких задач.

Пример 1. Решите уравнение $ax^2 + 2x + 1 = 0$, a – параметр.

Решение. В данной задаче требуется найти значение корней и их количество в зависимости от значения параметра a . Заметим, что при $a = 0$ уравнение станет линейным $2x + 1 = 0$, которое имеет единственное решение $x = -0,5$. Рассмотрим теперь значения, когда $a \neq 0$, тогда для решения квадратного уравнения находим его дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot a = 4 - 4a$.

Значит, если $a > 1$, то $D < 0$, тогда квадратное уравнение корней не имеет.

При $a = 1$ ($D = 0$) получим уравнение $x^2 + 2x + 1 = 0$, корни которого равны $x = -1$. Для $a < 1$ ($D > 0$) уравнение имеет два различных действительных корня, значения которых вычисляются по формулам:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}.$$

Ответ. При $a = 0$, $x = -0,5$; $a = 1$, $x = -1$.

При $a > 1$ решений нет.

При $a < 0$ или $0 < a < 1$ уравнение имеет корни

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}.$$

Пример 2. Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 + ax - 1 = 0$ удовлетворяют условию $x < 3$.

Решение. Так как $D = a^2 + 4$, уравнение при любых значениях параметра

a имеет корни $x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}$, $x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$, причем $x_1 < x_2$.

Поэтому искомые значения a составляют множество решений неравенства

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} < 3. \text{ Решив его, получим}$$

$$\sqrt{a^2 + 4} < 6 + a \Leftrightarrow a^2 + 4 < (a + 6)^2 \Leftrightarrow a > -\frac{8}{3}.$$

Ответ. При $a > -8/3$ корни уравнения $x^2 + ax - 1 = 0$ меньше 3.

Пример 3. Найдите все значения параметра a , при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a + 7 = 0$ равна 10.

Решение. Выражение корней через параметр по формулам через дискриминант ($D = a^2 - 4a - 28$) приводит к иррациональному уравнению, решение которого даже для сильного школьника может вызвать затруднения. Много проще получить решение, если воспользоваться теоремой Виета: если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то они связаны соотношениями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}.$$

В нашем случае получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 \cdot x_2 = a + 7 \\ x_1^2 + x_2^2 = 10 \end{cases}.$$

Так как по формуле сокращенного умножения

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, из системы уравнений имеем $a^2 - 2(a + 7) = 10$ или $a^2 - 2a - 24 = 0$, корнями которого являются числа 6 и -4. Однако проверка по условию существования корней ($D \geq 0$) показывает, что при $a = 6$ $D = -16 < 0$, поэтому в ответ попадает только значение $a = -4$ ($D = 4$).

Ответ. При $a = -4$ сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a + 7 = 0$ равна 10.

Данный пример показывает, что при применении теоремы Виета часто появляются посторонние значения параметра. Эти значения, которые не удовлетворяют «только одному условию» – при них квадратное уравнение не имеет корней. Поэтому найденные значения параметра необходимо проверять – имеются ли при них корни уравнения.

Одним из основных типовых заданий с параметрами, содержащими квадратный трехчлен, являются задачи, связанные с исследованием расположения корней квадратного уравнения на числовой оси в зависимости от его коэффициентов. При решении этих задач важно умение схематично представить график квадратичной функции и его использование для составления соотношений, приводящих к решению задания.

Пример 4. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a - 2)x^2 + (3a + 6)x + 6a = 0$ отрицательны?

Решение. Заметим, что для $a = 2$ уравнение станет линейным $12x + 12 = 0$, его корень $x = -1$ хоть и является отрицательным, однако условию, что оба корня должны быть отрицательными, не удовлетворяет.

Поэтому рассмотрим случай $a \neq 2$, тогда имеем дело с параболой, направление ветвей которой зависит от знака разности $a - 2$. Дальнейшее аналитическое решение этой задачи будет опираться на вспомогательную

теорему о расположении корней квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ относительно точки M . Данная теорема утверждает: для того чтобы оба корня были меньше, чем число M (т. е. лежали на числовой оси левее, чем точка M), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

Случай 1 ($a > 0$)	Случай 2 ($a < 0$)
$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ x_6 = -\frac{b}{2a} < M \\ f(M) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ x_6 = -\frac{b}{2a} < M \\ f(M) < 0 \end{cases}$

где $f(M) = aM^2 + bM + c$.

Легко увидеть, что оба случая можно объединить в одну систему, используя неравенство $a \cdot f(M) > 0$, из решения которого получаются первое и последнее неравенства систем (сл. 1 и сл. 2). Таким образом, имеем

$$\begin{cases} (a-2) \cdot f(0) > 0 \\ D = 9(a+2)^2 - 4(a-2) \cdot 6a \geq 0 \\ x_6 = -\frac{3a+6}{2(a-2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2) \cdot 6a > 0 \\ -15a^2 + 84a + 36 \geq 0 \\ \frac{a+2}{a-2} > 0 \end{cases}$$

Решая каждое неравенство в системе, найдем решение этой системы $a \in (2; 6]$.

Ответ. При $a \in (2; 6]$ оба корня уравнения будут отрицательными.

Замечание. Данное задание можно решить и без использования теоремы, применив условия теоремы Виета, из которых получится система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{3a+6}{a-2} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{6a}{a-2} > 0 \end{cases}$$

дополнив ее условием неотрицательности дискриминанта ($D \geq 0$).

2.3. Иррациональные уравнения

При решении заданий, связанных с иррациональными выражениями, становится существенным не только нахождение и использование области допустимых значений уравнения, но и обязательное рассмотрение области существования алгебраических выражений и функций, входящих в это уравнение. Рассмотрим данное утверждение на примерах.

Пример 1. Найдите решение уравнения $\sqrt{4x+a} = x$, где a – параметр.

Решение. Как выражение, содержащее иррациональность, поэтому в решении найдем ОДЗ: $x \geq 0$. Возведем обе части в квадрат, получим уравнение:

$x^2 - 4x - a = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $D = 16 + 4a$, возможны три случая:

- 1) если $D < 0$, т. е. $a < -4$, тогда у уравнения решений нет;
- 2) когда $D = 0$ ($a = -4$), получим решение $x = 2$;
- 3) при $D > 0$ ($a > -4$) у квадратного уравнения существуют два корня:
 $x_1 = 2 - \sqrt{4 + a}$, $x_2 = 2 + \sqrt{4 + a}$.

Заметим, что второй корень удовлетворяет ОДЗ при любом $a > -4$, кроме того, $2 - \sqrt{4 + a} < 0$ при $a > 0$.

Таким образом, на $(-4; 0]$ уравнение имеет два корня.

Ответ. При $a \in (-\infty; -4)$ решений нет;

при $a = -4$ $x = 2$; если $a \in (0; +\infty)$ $x = 2 + \sqrt{4 + a}$;

при $a \in (-4; 0]$ $x_1 = 2 - \sqrt{4 + a}$, $x_2 = 2 + \sqrt{4 + a}$.

Пример 2. Найдите количество решений уравнения

$a = \sqrt{4|x| - x^2}$ в зависимости от значений параметра a .

Решение. При $a < 0$ уравнение не имеет решений, поэтому будем рассматривать лишь $a \geq 0$. Преобразуем уравнение к виду $a^2 = 4|x| - x^2$ или

$$|x|^2 - 4|x| + 4 - 4 + a^2 = 0 \Leftrightarrow (|x| - 2)^2 = 4 - a^2.$$

Видим, что при $a > 2$ решений нет. При $a = 2$ имеем $|x| = 2$ и $x = \pm 2$ – два решения. При $0 < a < 2$ $|x| - 2 = \pm \sqrt{4 - a^2}$, $|x| = 2 \pm \sqrt{4 - a^2}$.

Так как выражение в правой части равенств больше нуля, то $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - a^2}$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{4 - a^2}$,

получится четыре решения уравнения. При $a = 0$

$$(|x| - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 2 \pm 2,$$

т. е. уравнение имеет три решения: $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$.

Ответ. При $a < 0$ и $a > 2$ корней нет; при $a = 2$ – два корня; при $a = 0$ – три корня; при $0 < a < 2$ – четыре корня.

Пример 3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$\sqrt{2x - 3} = x + a$ имеет единственный корень.

Решение. Найдём ОДЗ данного уравнения $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x + a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1,5 \\ x \geq -a \end{cases}$.

Возведем обе части в квадрат, после преобразования получим

$$x^2 + (2a - 2)x + a^2 + 3 = 0.$$

Исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда это квадратное уравнение имеет единственный корень, удовлетворяющий условию $x \geq 1,5$. Это возможно в двух случаях: 1) когда дискриминант квадратного уравнения D равен нулю и его корень удовлетворяет ОДЗ; 2) когда квадратное уравнение имеет два корня, один из которых не удовлетворяет ОДЗ примера. Рассмотрим эти случаи.

1. Единственный корень квадратного уравнения при $D = (2a - 2)^2 - 4(a^2 + 3) = 0$ или $D = -8a - 8 = 0$ при $a = -1$. При этом значении корень уравнения $x = 2$ удовлетворяет условиям ОДЗ.

2. Если $D > 0$ ($a < -1$), то корнями уравнения будут

$$x_{1,2} = \frac{2 - 2a \pm \sqrt{-8a - 8}}{2} = 1 - a \pm \sqrt{-2a - 2}.$$

Очевидно, что корень $x = 1 - a + \sqrt{-2a - 2}$ удовлетворяет условиям ОДЗ, так как $x + a = 1 + \sqrt{-2a - 2} \geq 0$, поэтому для существования единственности решения необходимо, чтобы для $x = 1 - a - \sqrt{-2a - 2}$ было выполнено неравенство $x + a < 0$. Тогда в нашем случае имеем

$$1 - \sqrt{-2a - 2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{-2a - 2} > 1 \Leftrightarrow a < -1,5.$$

Ответ. При $a = -1$ и $a < -1,5$ иррациональное уравнение $\sqrt{2x - 3} = x + a$ имеет единственное решение.

2.4. Линейные неравенства

Рассмотрим несколько приемов в решении линейных неравенств, содержащие параметр.

Пример 1. При всех значениях параметра a решите неравенство

$$(2a - a^2)x > 2a - 4.$$

Если бы мы решали уравнение $(2a - a^2)x = 2a - 4$, мы бы рассматривали два случая $2a - a^2 = 0$ и $2a - a^2 \neq 0$. При решении же неравенства нам придется рассмотреть три случая: $2a - a^2 = 0$, $2a - a^2 > 0$ и $2a - a^2 < 0$. Это связано с тем, что свойства неравенства при делении на положительные и отрицательные числа разные. А в этом задании придется делить на $2a - a^2$.

Решение. Случай 1. $2a - a^2 = 0$, т. е. $a = 0$ или $a = 2$.

1. $a = 0$, тогда исходное неравенство имеет вид: $0 \cdot x > -4$, которое очевидно выполняется для любого x ;

2. Если $a = 2$, то получим $0 \cdot x > 0$, которое не выполняется ни при каких x .

Случай 2. $2a - a^2 > 0$, оно равносильно $a \in (0; 2)$, тогда, разделив на

$2a - a^2$, получаем $x > \frac{2a-4}{2a-a^2} = \frac{2(a-2)}{a(2-a)} = -\frac{2}{a}$. Следовательно, решениями неравенства в этом случае будут $x \in \left(-\frac{2}{a}; +\infty\right)$.

Случай 3. $2a - a^2 < 0$, т. е. $a < 0$ или $a > 2$, тогда, разделив на $2a - a^2$ и поменяв знак неравенства, получаем $x < \frac{2a-4}{2a-a^2} = -\frac{2}{a}$, т. е. $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{a}\right)$.

Ответ. При $a = 0$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a = 2$ решений нет;

при $0 < a < 2$ $x \in \left(-\frac{2}{a}; +\infty\right)$,

при $a < 0$ или $a > 2$ $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{a}\right)$.

Пример 2. При каких a все решения неравенства $x - 4 + 2a < 0$ являются решениями неравенства $2x + 3 - a < 0$?

Решение. Найдем решение 1-го неравенства, тогда получим $x < 4 - 2a$, для другого неравенства аналогично имеем $x < 0,5a - 1,5$. Для выполнения условия задачи необходимо решить неравенство $4 - 2a \leq 0,5a - 1,5$; откуда получим $a \geq 2,2$.

Ответ. При $a \geq 2,2$ все решения неравенства $x - 4 + 2a < 0$ одновременно удовлетворяют и неравенству $2x + 3 - a < 0$.

2.5. Квадратные неравенства

Квадратные неравенства с параметром делятся на несколько типов, рассмотрим некоторые из них.

Пример 1. При всех значениях параметра a решите неравенство

$$ax^2 + 2ax + 1 \geq 0.$$

Идея решения данного неравенства достаточно проста. При $a = 0$ данное неравенство линейное и его решение рассматривается отдельно. При всех остальных значениях параметра неравенство становится квадратным, его решение зависит от знака дискриминанта, которое может быть сопряжено с внушительными выкладками и достаточно большим количеством случаев, необходимых для исследования и получения ответа.

Решение. Случай 1. При $a = 0$ исходное неравенство $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot x + 1 \geq 0$ равносильно $1 \geq 0$, решением которого будет любое x .

Случай 2. При $a > 0$ ветви параболы $y = ax^2 + 2ax + 1$ направлены вверх, дискриминант квадратного трехчлена равен $D = (2a)^2 - 4a = 4a^2 - 4a$.

1. Если $D < 0$, т. е. $a \in (0;1)$, тогда парабола находится выше оси Ox , поэтому решение неравенства – $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Если $D = 0$ ($a = 1$), парабола касается оси Ox , и решением также является x – любое число.

3. Если $D > 0$, что в нашем случае $a \in (1; +\infty)$, то вычислим значение корней квадратного трехчлена:

$$x_1 = \frac{-2a - \sqrt{4a^2 - 4a}}{2a} = -1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}.$$

Так как $x_1 < x_2$, то решением неравенства будут

$$x \in \left(-\infty; -1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}\right] \cup \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}; +\infty\right).$$

Случай 3. При $a < 0$ дискриминант $D = 4a^2 - 4a$ всегда положительный и ветви параболы $y = ax^2 + 2ax + 1$ направлены вниз. Следовательно, решением неравенства будет промежуток между корнями квадратного трехчлена, т. е.

$$x \in \left[-1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}; -1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}\right].$$

Ответ.

При $0 \leq a \leq 1$ x – любое действительное число;

$$\text{при } a \in (1; +\infty) \quad x \in \left(-\infty; -1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}\right] \cup \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}; +\infty\right);$$

$$\text{при } a < 0 \quad x \in \left[-1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}; -1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}\right].$$

Другой тип – это задачи, в которых задано некоторое множество M , отличное от множества действительных чисел, и нам требуется найти значения параметра, при которых данное квадратное неравенство выполняется на множестве M . Основной подход к их решению – нахождение нужного расположения корней квадратного трехчлена относительно множества M , а затем с использованием геометрических фактов (график параболы) описать найденное расположение корней на языке неравенств.

Пример 2. При каких значениях параметра a все решения неравенства $x^2 - a(x - 1) - 1 < 0$ являются решениями неравенства $x^2 - 2x - 3 \leq 0$?

Решение. Решения неравенства $x^2 - ax + a - 1 < 0$ заполняют интервал $(x_1; x_2)$, где

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4(a-1)}}{2} = \frac{1}{2}(a - |a-2|), \quad x_2 = \frac{1}{2}(a + |a-2|).$$

Неравенство $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ верно при $-1 \leq x \leq 3$. Поэтому интервал $(x_1; x_2)$ является подмножеством отрезка $[-1; 3]$ лишь при одновременном выполнении соотношений: $-1 \leq x_1$ и $x_2 \leq 3$.

При $a \geq 2$ $|a - 2| = a - 2$, $x_1 = 1$ и $x_2 = a - 1$, тогда требуемые соотношения выполняются при $2 \leq a \leq 4$. При $a < 2$ $|a - 2| = 2 - a$, $x_1 = a - 1$ и $x_2 = 1$, т. е. требуемые соотношения выполняются при $0 \leq a < 2$.

Ответ. При каждом значении $0 \leq a \leq 4$ все решения неравенства с параметром являются решениями неравенства $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.

Еще бывает тип квадратных неравенств, в которых требуется найти значения параметра, когда данное неравенство:

- 1) выполняется для любого действительного x ;
- 2) выполняется ровно для одного значения x из R ;
- 3) не выполняется ни для одного значения x .

Пример 3. Найдите значения параметра a , при которых неравенство $x^2 - (a - 1)(x - 1) > 0$ выполняется при любых x .

Решение. Так как ветви параболы $y = x^2 - (a - 1)x + a - 1$, поэтому, чтобы выполнялось условие задачи, достаточно будет отрицательности дискриминанта, т. е. отсутствия корней квадратного трехчлена. В нашем случае $D = (a - 1)^2 - 4(a - 1) = (a - 1)(a - 1 - 4) < 0$. Решением этого неравенства будет интервал $(1; 5)$.

Ответ. При $1 < a < 5$ неравенство $x^2 - (a - 1)(x - 1) > 0$ выполняется для всех действительных x .

2.6. Иррациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств так же, как для иррациональных уравнений, решение начинается с рассмотрения ОДЗ задачи и преобразований, приводящих к рационализации.

Пример 1. Найдите при всех значениях параметра a решение неравенства $x + 4a < 5\sqrt{ax}$.

Решение. Так как ОДЗ $ax \geq 0$, то рассмотрим три случая.

1. Если $a < 0$, тогда $x \leq 0$, при таких a и x левая часть неравенства отрицательна, а правая часть неотрицательна и значит, исходное неравенство выполнимо.

2. Если $a = 0$, то данному неравенству удовлетворяет любое число $x < 0$.

3. Пусть $a > 0$, тогда $x \geq 0$. При таких значениях a и x преобразуем неравенство к виду $(x + 4a)^2 < 25ax$ или $x^2 - 17ax + 16a^2 < 0$. Если его переписать следующим образом: $(x - a)(x - 16a) < 0$, то, решая последнее неравенство, получим $a < x < 16a$.

Ответ. При $a \in (-\infty; 0)$ $x \in (-\infty; 0]$;

при $a = 0$ $x < 0$;

при $a > 0$ $a < x < 16a$.

Пример 2. Найдите значения параметра a , при которых множество решений неравенства $\sqrt{3ax + 4a^2} < x + 2a$ не пересекается с множеством $-1 \leq x \leq 0$.

Решение. Сначала найдем решение иррационального неравенства в зависимости от значений параметра, а затем воспользуемся дополнительным условием задачи. Рассмотрим три случая: $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.

В случае $a < 0$ исходное неравенство, возможно, имеет решение, если выполняются условия: $x + 2a > 0$, $x > 0$. Но при таких условиях подкоренное выражение $3ax + 4a^2 = a(x + 2(a + 2x))$ будет отрицательным, и значит, неравенство решений не имеет. Если $a = 0$, то решение иррационального неравенства – это все $x > 0$. Рассмотрим случай $a > 0$, тогда исходное неравенство равносильно системе неравенств
$$\begin{cases} 3ax + 4a^2 \geq 0 \\ 3ax + 4a^2 < (x + 2a)^2 \end{cases}$$

Решим данную систему при условии $a > 0$, тогда

$$\begin{cases} a(3x + 4a) \geq 0 \\ 3ax + 4a^2 < x^2 + 4ax + 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4a/3 \\ x(x + a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4a/3 \\ x < -a \text{ или } x > 0 \end{cases}$$

Решением системы будет $x \in [-4a/3; -a) \cup (0; +\infty)$. Так как промежуток $(0; +\infty)$ не имеет общих точек с отрезком $[-1; 0]$, то для окончательного ответа на вопрос задачи необходимо найти значения параметра a , при которых $[-4a/3; -a)$ лежит левее этого отрезка.

Откуда имеем $-a < -1$ или $a > 1$.

Ответ. При $a = 0$ и $a > 1$ решение иррационального неравенства

$\sqrt{3ax + 4a^2} < x + 2a$ не пересекается с отрезком $[-1; 0]$.

2.7. Задания для самостоятельного решения

Задача 1. При каких значениях параметра a уравнения:

$$ax - a + 2 - x = 0 \text{ и}$$

$$ax - a - x - 2 = 0 \text{ равносильны.}$$

Указание к решению: воспользуйтесь утверждением: «уравнения являются равносильными, если они имеют совпадающие решения или одновременно не имеют решения».

Задача 2. При всех значениях параметра a решите неравенство

$$3(2a - x) < ax + 1.$$

Указание к решению: для линейного неравенства рассмотрите три случая:

1) $a = -3$,

2) $a < -3$,

3) $a > -3$.

Задача 3. Найдите значения параметра a , при которых все корни уравнения $2ax^2 - 2(5 - a)x + 5a - 5 = 0$ меньше -1 .

Указание к решению: используя теорему о расположении корней квадратного трехчлена относительно числа (-1) , получите системы, рассмотрите случаи $a > 0$ и $a < 0$, затем найдите их решения.

Задача 4. Найдите решение неравенства $x^2 + 2x + a > 0$, a – параметр.

Указание к решению: определите вид решения квадратного неравенства в зависимости от знака дискриминанта.

Задача 5. Решите неравенство $\sqrt{2+x} > a$ в зависимости от значений параметра a .

Указание к решению: рассмотрите решение при $a < 0$ и $a \geq 0$.

Ответы:

№ задачи	Ответ
1	$a = 1$
2	При $a = -3$ x – любое действительное число, при $a < -3$ $x < \frac{6a-1}{a+3}$, при $a > -3$ $x > \frac{6a-1}{a+3}$
3	$a \in \left[-\frac{5}{3}; -1\right)$
4	При $a < 1$ $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{1-a}) \cup (-1 + \sqrt{1-a}; +\infty)$, при $a = 1$ $x \neq -1$, при $a > 1$ x – любое действительное число
5	При $a < 0$ $x \in [-2; +\infty)$, при $a \geq 0$ $x \in (\sqrt{a^2 - 2}; +\infty)$

Заключение

Решение задач с параметрами является актуальной проблемой, и для ее решения недостаточно просто предлагать обучающимся такие задачи. У большинства учеников возникают трудности, которые приводят их к мысли об отсутствии у них необходимых способностей.

Решая задачи с параметрами, обучающиеся демонстрируют метапредметные (выявлять и характеризовать, делать выводы, самостоятельно выбирать способ решения учебной задачи, формулировать вопросы, формировать гипотезу, оценивать на применимость и достоверность, самостоятельно формулировать обобщения и выводы, применять различные методы и инструменты, выбирать, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления) и предметные результаты (оперировать понятиями, умение составлять выражения, уравнения, неравенства и системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность полученных результатов, делать прикидку и оценку результата вычислений).

Если у обучающихся на этапах исследования возникают затруднения, надо совместно разработать алгоритм исследования, серию вопросов, которые будут помогать ученикам продвигаться постепенно. Начинать следует с простых заданий, решать вспомогательные задачи, постепенно переходя к более сложным. Приучать учеников обращаться к рассуждениям. В процессе рассуждений необходимо, чтобы обучающиеся задавали вопросы, высказывали предположения и гипотезы, анализировали полученные решения.

Опыт учителей, обучающиеся которых показывают хорошие результаты решения задач с параметрами, показывает, что наибольшие трудности у учеников возникают при формулировке более общей задачи. Поэтому учителю необходимо сначала самому проводить обобщение, формулировать более общую задачу. Важно показывать, как от вопросов переходить к постановке проблемы, далее к анализу методов решения, исследованию и анализу полученного решения задачи.

Следует также отметить, что порой обучающиеся, решая задачи с параметрами, дают неполный ответ. Поэтому необходимо приучать неоднократно обращаться к условиям задачи. Читать задачу, поочередно двигаясь от искомым к данным и от данных к искомым, находить и анализировать связи между ними, анализировать полученные результаты.

Используя параметризацию или фиксирование значений параметра, учитель может осуществлять дифференциацию обучения как при групповой, так и при индивидуализированной формах организации учебной деятельности.

Мы считаем, что приобретение навыков решения нестандартных заданий, в том числе задач с параметрами, обучающимися школ по-прежнему остается актуальным [6, 10]. Введение задач с параметрами в повседневную практику приведет к появлению возможности для каждого обучающегося приобрести навыки исследовательской деятельности, столь необходимые в современном обществе.

В данных методических рекомендациях мы рассмотрели аналитический метод решения задач с параметрами и провели анализ затруднений, возникающих при использовании данного метода.

В дальнейшем мы планируем продолжить работу в этом направлении и рассмотреть особенности применения графического метода при решении задач с параметрами, провести анализ затруднений обучающихся.

Список литературы

1. Высоцкий, В. С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ : учебное пособие / В. С. Высоцкий. – М. : Научный мир, 2011. – 316 с. – Текст : непосредственный.
2. Горностаев, О. М. Задачи с параметрами в школьном курсе математики / О. М. Горностаев, К. В. Горбачевская. – Текст : непосредственный // Молодой ученый. – 2020. – № 25 (315). – С. 385 – 388. — URL: <https://moluch.ru/archive/315/72002/> (дата обращения: 04.11.2022).
3. Городничева, А. К. Причины сложности обучения решению задач с параметрами в школе и пути их преодоления / А. К. Городничева. – Текст : непосредственный // Молодой ученый. – 2022. – № 4 (399). – С. 324 – 326. – URL: <https://moluch.ru/archive/399/88383/> (дата обращения: 16.11.2022).
4. ЕГЭ 2020, математика, задачи с параметром, задача 18 (профильный уровень) / Яценко И. В., Шестаков С. А. – М. : Эксмо, 2020. – Текст : непосредственный.
5. ЕГЭ 2022. Математика. Профильный уровень / Г. В. Дорофеев, Е. А. Седова, С. А. Шестаков, С. В. Ичелинцев. – М. : Эксмо, 2021. – 288 с. – Текст : непосредственный.
6. Козко, А. И. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи / А. И. Козко. – М. : МЦНМО, 2016. – 229 с. – Текст : непосредственный.
7. Математика. Трудные задания ЕГЭ. Задачи с параметром: профильный уровень. Серия: Трудные задания ЕГЭ / А. В. Шевкин. – М. : Просвещение, 2020. – 96 с. – Текст : непосредственный.
8. Мирошин, В. В. Существенные признаки понятия «параметр» / В. В. Мирошин. – Текст : непосредственный // Математика в школе. – 2010. – № 7. – С. 19 – 22.
9. Новоселов, С. И. Специальный курс алгебры / С. И. Новоселов. – М. : Высшая школа, 1962. – 206 с. – Текст : непосредственный.
10. Прокопьев, А. А. Задачи с параметрами. Подготовка к ГИА и ЕГЭ / А. А. Прокопьев. – [2-е изд., испр. и доп.]. – М. : Бином, 2015. – 400 с. – Текст : непосредственный.
11. Шахмейстер, А. Х. Уравнения и неравенства с параметрами / А. Х. Шахмейстер. – [4-е изд.]. – СПб. : Виктория плюс; М. : МЦНМО; СПб. : Петроглиф, 2019. – 304 с. – Текст : непосредственный.